Arithmétique

1 Diviseurs d'un nombre

Cet exercice propose une démarche permettant d'obtenir tous les diviseurs d'un nombre entier quelconque.

1. Décomposer 72 en produit de nombres premiers, simplifier l'écriture obtenue en utilisant la notation puissance.
2. On considère le produit $(1+2+2^2+2^3)\times(1+3+3^2)$, combien obtiendrait-on de termes en le développant ?
3. Développer sans effectuer la somme le produit $(1+2+2^2+2^3)\times(1+3+3^2)$, que représentent les termes obtenus pour l'entier 72 ?
4. Combien 72 possède-t-il de diviseurs ?
5. Calculer de la même façon les diviseurs de 135.
6. Combien l'entier 20000 possède-t-il de diviseurs ?

2 Résolution d'une équation diophantienne

Le but de l'exercice est de trouver tous les x et y entiers vérifiant l'équation $x^2-y^2=13$.

1. Factoriser x^2-y^2.
2. Ecrire toutes les décompositions possibles de 13 en produit de deux nombres entiers relatifs.
3. Donner pour chacune de ces décompositions le sytème d'équations vérifié par x et y.
4. Calculer les couples (x,y) solutions de l'équation $x^2-y^2=13$.

3 Etude de la parité d'une expression polynômiale

Le but de l'exercice est de montrer que l'expression n^2+n+1 fournit un nombre impair pour n entier.

1. Vérifier que n^2+n+1 est un entier impair pour $n=1,2,3,4$ et 5.
2. On suppose que n est pair et on pose $n=2k$. Calculer n^2+n+1 en fonction de k, en déduire que si n est pair, n^2+n+1 est impair.
3. On suppose que n est impair et on pose $n=2k+1$. Calculer n^2+n+1 en fonction de k, en déduire que si n est impair, n^2+n+1 est impair.
4. En conclure que si n est un nombre entier, n^2+n+1 est un nombre entier impair.