

## Arithmétique

### 1 Diviseurs d'un nombre

1. On peut diviser 72 par 2 et 3, on obtient :

$$72 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 = 2^3 \times 3^2$$

2. On obtient les termes du développement de  $(1 + 2 + 2^2 + 2^3) \times (1 + 3 + 3^2)$  en multipliant chaque terme de la première parenthèse par ceux de la seconde soit au total  $4 \times 3 = 12$  termes.

3. Les termes obtenus sont :

$$\begin{array}{rcl} 1 & \times & 1 = 1 \\ 1 & \times & 3 = 3 \\ 1 & \times & 3^2 = 9 \\ 2 & \times & 1 = 2 \\ 2 & \times & 3 = 6 \\ 2 & \times & 3^2 = 18 \\ 2^2 & \times & 1 = 4 \\ 2^2 & \times & 3 = 12 \\ 2^2 & \times & 3^2 = 36 \\ 2^3 & \times & 1 = 8 \\ 2^3 & \times & 3 = 24 \\ 2^3 & \times & 3^2 = 72 \end{array}$$

Ce sont les diviseurs de 72.

4. L'entier 72 possède donc 12 diviseurs.  
5. La décomposition de 135 en facteurs premiers est :

$$135 = 3^3 \times 5$$

Les diviseurs de 135 sont donc les termes du développement de :

$$(1 + 3 + 3^2 + 3^3) \times (1 + 5)$$

Le nombre de diviseurs de 135 est donc  $4 \times 2 = 8$ .

6. La décomposition de 20000 en facteurs premiers est :

$$20000 = 2^5 \times 5^4$$

Le nombre de diviseurs de 20000 est donc  $6 \times 5 = 30$ .

## 2 Résolution d'une équation diophantienne

1.  $x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$ .
2. Les décompositions possibles de 13 en produit de deux nombres entiers relatifs sont :

$$\begin{aligned} 13 &= 1 \times 13 \\ 13 &= 13 \times 1 \\ 13 &= (-1) \times (-13) \\ 13 &= (-13) \times (-1) \end{aligned}$$

3. Dans chacun des cas, on obtient donc en utilisant la première question un système d'équations pour  $x$  et  $y$  :

$$\begin{cases} x + y &= 1 \\ x - y &= 13 \\ x + y &= 13 \\ x - y &= 1 \\ x + y &= -1 \\ x - y &= -13 \\ x + y &= -13 \\ x - y &= -1 \end{cases}$$

4. On obtient en résolvant ces systèmes les couples  $(x, y)$  solutions de l'équation  $x^2 - y^2 = 13$  :

$$\begin{aligned} (x, y) &= (7, -6) \\ (x, y) &= (7, 6) \\ (x, y) &= (-7, 6) \\ (x, y) &= (-7, -6) \end{aligned}$$

## 3 Etude de la parité d'une expression polynômiale

1. Calculons  $n^2 + n + 1$  pour  $n = 1, 2, 3, 4$  et  $5$  :

$$\begin{aligned} 1^2 + 1 + 1 &= 3 \\ 2^2 + 2 + 1 &= 7 \\ 3^2 + 3 + 1 &= 13 \\ 4^2 + 4 + 1 &= 21 \\ 5^2 + 5 + 1 &= 31 \end{aligned}$$

$n^2 + n + 1$  est un entier impair pour  $n = 1, 2, 3, 4$  et  $5$ .

2. Calculons  $n^2 + n + 1$  pour  $n = 2k$  :

$$(2k)^2 + (2k) + 1 = 4k^2 + 2k + 1 = 2(2k^2 + k) + 1$$

Ce nombre est la somme d'un nombre pair et de 1, c'est donc un nombre impair.

3. Calculons  $n^2 + n + 1$  pour  $n = 2k + 1$  :

$$(2k + 1)^2 + (2k + 1) + 1 = 4k^2 + 4k + 1 + 2k + 1 + 1 = 4k^2 + 6k + 3 = 2(2k^2 + 3k + 1) + 1$$

Ce nombre est la somme d'un nombre pair et de 1, c'est donc un nombre impair.

4. On a montré que si  $n$  est pair  $n^2 + n + 1$  est un nombre entier impair et que si  $n$  est impair  $n^2 + n + 1$  est aussi un nombre entier impair donc pour tout nombre entier  $n$ ,  $n^2 + n + 1$  est un nombre entier impair.