Arithmétique

1 Diviseurs d'un nombre

1. On peut diviser 72 par 2 et 3, on obtient :

$$72 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 = 2^3 \times 3^2$$

2. On obtient les termes du développement de $(1 + 2 + 2^2 + 2^3) \times (1 + 3 + 3^2)$ en multipliant chaque terme de la première parenthèse par ceux de la seconde soit au total $4 \times 3 = 12$ termes.
3. Les termes obtenus sont :

$$\begin{array}{ccccc}
1 & \times & 1 & = & 1 \\
1 & \times & 3 & = & 3 \\
1 & \times & 3^2 & = & 9 \\
2 & \times & 1 & = & 2 \\
2 & \times & 3 & = & 6 \\
2 & \times & 3^2 & = & 18 \\
2^2 & \times & 1 & = & 4 \\
2^2 & \times & 3 & = & 12 \\
2^2 & \times & 3^2 & = & 36 \\
2^3 & \times & 1 & = & 8 \\
2^3 & \times & 3 & = & 24 \\
2^3 & \times & 3^2 & = & 72
\end{array}$$

Ce sont les diviseurs de 72.
4. L'entier 72 possède donc 12 diviseurs.
5. La décomposition de 135 en facteurs premiers est :

$$135 = 3^3 \times 5$$

Les diviseurs de 135 sont donc les termes du développement de :

$$(1 + 3 + 3^2 + 3^3) \times (1 + 5)$$

Le nombre de diviseurs de 135 est donc $4 \times 2 = 8$.
6. La décomposition de 20000 en facteurs premiers est :

$$20000 = 2^5 \times 5^4$$

Le nombre de diviseurs de 20000 est donc $6 \times 5 = 30$.

2 Résolution d'une équation diophantienne

1. $x^2 - y^2 = (x+y)(x-y)$.
2. Les décompositions possibles de 13 en produit de deux nombres entiers relatifs sont :

$$\begin{array}{ccccc} 13 & = & 1 & \times & 13 \\ 13 & = & 13 & \times & 1 \\ 13 & = & (-1) & \times & (-13) \\ 13 & = & (-13) & \times & (-1) \end{array}$$

3. Dans chacun des cas, on obtient donc en utilisant la première question un sytème d'équations pour x et y :

$$\left\{\begin{array}{ccc} x+y & = & 1 \\ x-y & = & 13 \end{array}\right.$$
$$\left\{\begin{array}{ccc} x+y & = & 13 \\ x-y & = & 1 \end{array}\right.$$
$$\left\{\begin{array}{ccc} x+y & = & -1 \\ x-y & = & -13 \end{array}\right.$$
$$\left\{\begin{array}{ccc} x+y & = & -13 \\ x-y & = & -1 \end{array}\right.$$

4. On obtient en résolvant ces systèmes les couples (x, y) solutions de l'équation $x^2 - y^2 = 13$:

$$\begin{array}{ccc} (x,y) & = & (7,-6) \\ (x,y) & = & (7,6) \\ (x,y) & = & (-7,6) \\ (x,y) & = & (-7,-6) \end{array}$$

3 Etude de la parité d'une expression polynômiale

1. Calculons $n^2 + n + 1$ pour $n = 1, 2, 3, 4$ et 5 :

$$\begin{array}{ccc} 1^2+1+1 & = & 3 \\ 2^2+2+1 & = & 7 \\ 3^2+3+1 & = & 13 \\ 4^2+4+1 & = & 21 \\ 5^2+5+1 & = & 31 \end{array}$$

   $n^2 + n + 1$ est un entier impair pour $n = 1, 2, 3, 4$ et 5.
2. Calculons $n^2 + n + 1$ pour $n = 2k$:

$$(2k)^2 + (2k) + 1 = 4k^2 + 2k + 1 = 2(2k^2 + k) + 1$$

   Ce nombre est la somme d'un nombre pair et de 1, c'est donc un nombre impair.
3. Calculons $n^2 + n + 1$ pour $n = 2k + 1$:

$$(2k+1)^2 + (2k+1) + 1 = 4k^2 + 4k + 1 + 2k + 1 + 1 = 4k^2 + 6k + 3 = 2(2k^2 + 3k + 1) + 1$$

   Ce nombre est la somme d'un nombre pair et de 1, c'est donc un nombre impair.
4. On a montré que si n est pair n^2+n+1 est un nombre entier impair et que si n est impair $n^2 + n + 1$ est aussi un nombre entier impair donc pour tout nombre entier n, $n^2 + n + 1$ est un nombre entier impair.