

## Ensembles de nombres

### 1 (Ir)rationalité et Opérations

1. Démontrer que la somme de deux nombres rationnels est un nombre rationnel.
2. Démontrer que la somme d'un nombre rationnel et d'un nombre irrationnel est un nombre irrationnel.
3. La somme de deux nombres irrationnels est-elle un nombre irrationnel ?
4. Que peut-on dire au sujet du produit de nombres rationnels ou irrationnels ?

### 2 Le « nombre d'or »

1. Dans un repère orthonormé  $(O, I, J)$ , placer les points  $K(1; 1)$  et  $L(\frac{1}{2}; 0)$  et construire ensuite le point  $P$  intersection du cercle de centre  $L$  de rayon  $[LK]$  avec la demi-droite  $[O, I)$ .
2. Démontrer que l'abscisse du point  $P$  est égale au « nombre d'or » :  $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ .
3. Démontrer que  $\phi^2 = \phi + 1$ .
4. En déduire que  $\phi = 1 + \frac{1}{\phi}$ .

### 3 Irrationalité de $\sqrt{2}$

On suppose que  $\sqrt{2}$  est rationnel et s'écrit sous la forme irréductible  $\frac{p}{q}$  avec  $p$  et  $q$  entiers naturels non nuls.

1. Démontrer que  $p^2 = 2 \times q^2$ .
2. (a) Suivant le dernier chiffre de  $p$ , quel est le dernier chiffre de  $p^2$  ?  
(b) Suivant le dernier chiffre de  $q$ , quel est le dernier chiffre de  $2 \times q^2$  ?
3. (a) Quel est donc le dernier chiffre de  $p^2 = 2 \times q^2$  ?  
(b) Par quel(s) chiffre(s) peuvent se terminer  $p$  et  $q$  ?
4. La fraction  $\frac{p}{q}$  est-elle irréductible ?
5.  $\sqrt{2}$  est-il rationnel ?