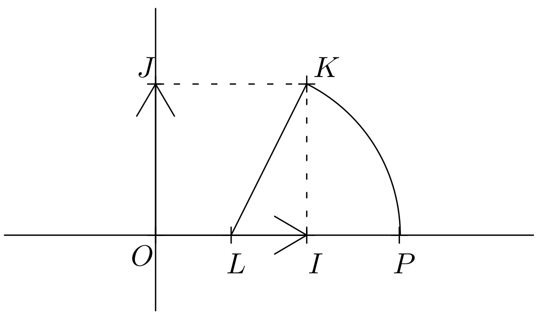
Ensembles de nombres

1 (Ir)rationalité et Opérations

1. Soient $x = \frac{p}{q}$ et $y = \frac{m}{n}$ deux nombres rationnels. Alors $x + y = \frac{pn+mq}{qn}$ est un nombre rationnel.
2. Soit $x = \frac{p}{q}$ un nombre rationnel et y un nombre irrationnel. La somme $x + y$ ne peut pas être un nombre rationnel $x + y = \frac{m}{n}$ car sinon $y = \frac{m}{n} - x = \frac{m}{n} - \frac{p}{q}$ serait un nombre rationnel d'après la question précédente. La somme $x + y$ est donc un nombre irrationnel.
3. La somme de deux nombres irrationnels n'est pas forcément un nombre irrationnel comme le montre l'exemple suivant : Soient $x = -\sqrt{2}$ qui est un nombre irrationnel et $y = 1 + \sqrt{2}$ qui est aussi un nombre irrationnel d'après la question précédente, alors $x + y = (-\sqrt{2}) + (1 + \sqrt{2}) = 1$ est un nombre rationnel.
4. On montre de la même façon que le produit de deux nombres rationnels est un nombre rationnel et que le produit d'un nombre rationnel par un nombre irrationnel est un nombre irrationnel. En revanche, le produit de deux nombres irrationnels n'est pas forcément irrationnel comme le montre l'exemple suivant : $\sqrt{2} \times \sqrt{2} = 2$.

2 Le « nombre d'or »

1. La construction est la suivante :



2. En utilisant le théorème de Pythagore dans le triangle KIL rectangle en I, on obtient $LK = \frac{\sqrt{5}}{2}$ d'où : $OP = OL + LP = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.
3. $$\phi^2 = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{1+2\sqrt{5}+5}{4} = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$$
$$\phi + 1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} + 1 = \frac{1+\sqrt{5}+2}{2} = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$$
Donc :
$$\phi^2 = \phi + 1$$

4. En divisant par ϕ (qui est non nul d'après l'égalité précédente) on obtient :

$$\phi = 1 + \frac{1}{\phi}$$

3 Irrationalité de $\sqrt{2}$

1. On élève au carré la relation $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ ce qui donne $2 = \frac{p^2}{q^2}$ d'où $2 \times q^2 = p^2$.
2. (a)

dernier chiffre de p	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
dernier chiffre de p^2	0	1	4	9	6	5	6	9	4	1

   (b)

dernier chiffre de q	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
dernier chiffre de $2 \times q^2$	0	2	8	8	2	0	2	8	8	2

3. (a) Le dernier chiffre de $p^2 = 2 \times q^2$ est donc obligatoirement 0.
   (b) p se termine donc par 0 et q peut donc se terminer par 0 ou 5.
4. La fraction $\frac{p}{q}$ n'est donc pas irréductible car p et q sont tous deux divisibles par 5.
5. On ne peut donc pas écrire $\sqrt{2}$ sous la forme d'un fraction $\frac{p}{q}$ irréductible et donc $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel.