Devoir maison de mathématiques n°1

Exercice 1

Simplifier au maximum les expressions suivantes en utilisant la décomposition en produit de facteurs premiers :

$$\begin{aligned} A &= \frac{6}{35} \times \frac{12^3}{121} \times \frac{77^2}{10^3} \\ B &= \sqrt{68850} \\ C &= \frac{11}{588} + \frac{17}{490} \end{aligned}$$

Exercice 2

Dire de chacune des assertions suivantes si elle est vraie ou fausse et justifier :

- Un nombre décimal est un nombre rationnel.
- L'inverse d'un entier relatif non nul est un nombre décimal.
- L'inverse d'un nombre irrationnel est un nombre irrationnel.
- La racine carrée d'un entier naturel est un nombre irrationnel.

Exercice 3

On considère un nombre premier $p \geqslant 3$ et on pose $a = \frac{p+1}{2}$ et $b = \frac{p-1}{2}$.

1. Démontrer que a et b sont des nombres entiers.
2. Calculer $a^2 - b^2$ en fonction de p.
3. Démontrer que tout nombre premier $p \geqslant 3$ peut s'écrire comme une différence de deux carrés de nombres entiers. Donner la décomposition en différence de deux carrés pour $p = 29$.

Exercice 4 *

On considère le nombre rationnel $\frac{17}{7}$.

1. (a) Poser la division de 17 par 7 afin d'obtenir 20 chiffres après la virgule.
   (b) Pourquoi suffit-il de calculer jusqu'à la 7^{e} décimale ?
2. (a) Expliquer pourquoi le développement décimal de $\frac{17}{7}$ est qualifié de périodique.
   (b) Calculer la 125^{e} décimale de $\frac{17}{7}$.

Exercice 5 *

On considère un nombre n s'écrivant $\overline{x104y}$ dans le système décimal. On cherche s'il existe x et y tels que le nombre n soit divisible par 126.

1. Ecrire la décomposition de 126 en produit de facteurs premiers.
2. Quels sont les valeurs possibles de y pour que le nombre n soit divisible par 2.
3. Pour chacune des valeurs de y précédentes, donner la(les) valeur(s) possible(s) de x pour que le nombre n soit divisible par 9.
4. Donner parmi les nombres n précédents celui(ceux) qui est(sont) divisible(s) par 7 ?
5. Donner le(les) nombre(s) $n = \overline{x104y}$ divisible(s) par 126 ?

Exercice 6 **

1. On considère le nombre $x = 0,54545454\ldots$ dont le développement décimal est périodique, on notera $x = 0,[54]$. Démontrer que $100x = 54 + x$, en déduire que x est un nombre rationnel dont on donnera la valeur.
2. Démontrer de la même façon que le nombre $0,9999\cdots = 0,[9]$ est égal à 1.
3. Déterminer l'écriture en fraction du nombre $0,27272727\cdots = 0,[27]$ et en déduire l'écriture en fraction du nombre $11,27272727\cdots = 11,[27]$.
4. Déterminer l'écriture en fraction du nombre $11,235353535\cdots = 11,2[35]$.

Exercice 7 **

Le but de l'exercice est de démontrer le critère de divisibilité par 7 suivant : Un nombre est divisible par 7 si en soustrayant le double de son dernier chiffre au nombre constitué des autres chiffres on obtient un multiple de 7 (par exemple, 5451 donne 545-2=543 qui donne 54-6=48 qui n'est pas un multiple de 7 donc 5451 n'est pas divisible par 7).

On pose $n = \overline{xy}$ où x est un entier et y le dernier chiffre de n.

1. Exprimer n en fonction de x et y.
2. On suppose que $x - 2y$ est un multiple de 7 et on pose $x - 2y = 7k$. Prouver qu'alors n est aussi un multiple de 7.
3. On suppose que n est un multiple de 7 et on pose $n = 7k'$. Prouver qu'alors $x - 2y$ est aussi un multiple de 7.