

# Devoir maison de mathématiques n°1

## Exercice 1

Simplifier au maximum les expressions suivantes en utilisant la décomposition en produit de facteurs premiers :

$$\begin{aligned}A &= \frac{6}{35} \times \frac{12^3}{121} \times \frac{77^2}{10^3} \\B &= \sqrt{68850} \\C &= \frac{11}{588} + \frac{17}{490}\end{aligned}$$

## Exercice 2

Dire de chacune des assertions suivantes si elle est vraie ou fausse et justifier :

- Un nombre décimal est un nombre rationnel.
- L'inverse d'un entier relatif non nul est un nombre décimal.
- L'inverse d'un nombre irrationnel est un nombre irrationnel.
- La racine carrée d'un entier naturel est un nombre irrationnel.

## Exercice 3

On considère un nombre premier  $p \geq 3$  et on pose  $a = \frac{p+1}{2}$  et  $b = \frac{p-1}{2}$ .

1. Démontrer que  $a$  et  $b$  sont des nombres entiers.
2. Calculer  $a^2 - b^2$  en fonction de  $p$ .
3. Démontrer que tout nombre premier  $p \geq 3$  peut s'écrire comme une différence de deux carrés de nombres entiers. Donner la décomposition en différence de deux carrés pour  $p = 29$ .

## Exercice 4 \*

On considère le nombre rationnel  $\frac{17}{7}$ .

1. (a) Poser la division de 17 par 7 afin d'obtenir 20 chiffres après la virgule.  
(b) Pourquoi suffit-il de calculer jusqu'à la 7<sup>e</sup> décimale ?
2. (a) Expliquer pourquoi le développement décimal de  $\frac{17}{7}$  est qualifié de périodique.  
(b) Calculer la 125<sup>e</sup> décimale de  $\frac{17}{7}$ .

**Exercice 5 \***

On considère un nombre  $n$  s'écrivant  $\overline{x104y}$  dans le système décimal. On cherche s'il existe  $x$  et  $y$  tels que le nombre  $n$  soit divisible par 126.

1. Ecrire la décomposition de 126 en produit de facteurs premiers.
2. Quels sont les valeurs possibles de  $y$  pour que le nombre  $n$  soit divisible par 2.
3. Pour chacune des valeurs de  $y$  précédentes, donner la(les) valeur(s) possible(s) de  $x$  pour que le nombre  $n$  soit divisible par 9.
4. Donner parmi les nombres  $n$  précédents celui(ceux) qui est(sont) divisible(s) par 7 ?
5. Donner le(les) nombre(s)  $n = \overline{x104y}$  divisible(s) par 126 ?

**Exercice 6 \*\***

1. On considère le nombre  $x = 0,54545454\dots$  dont le développement décimal est périodique, on notera  $x = 0, [54]$ . Démontrer que  $100x = 54 + x$ , en déduire que  $x$  est un nombre rationnel dont on donnera la valeur.
2. Démontrer de la même façon que le nombre  $0,9999\dots = 0, [9]$  est égal à 1.
3. Déterminer l'écriture en fraction du nombre  $0,27272727\dots = 0, [27]$  et en déduire l'écriture en fraction du nombre  $11,27272727\dots = 11, [27]$ .
4. Déterminer l'écriture en fraction du nombre  $11,23535353\dots = 11, 2[35]$ .

**Exercice 7 \*\***

Le but de l'exercice est de démontrer le critère de divisibilité par 7 suivant : Un nombre est divisible par 7 si en soustrayant le double de son dernier chiffre au nombre constitué des autres chiffres on obtient un multiple de 7 (par exemple, 5451 donne  $545-2=543$  qui donne  $54-6=48$  qui n'est pas un multiple de 7 donc 5451 n'est pas divisible par 7).

On pose  $n = \overline{xy}$  où  $x$  est un entier et  $y$  le dernier chiffre de  $n$ .

1. Exprimer  $n$  en fonction de  $x$  et  $y$ .
2. On suppose que  $x - 2y$  est un multiple de 7 et on pose  $x - 2y = 7k$ . Prouver qu'alors  $n$  est aussi un multiple de 7.
3. On suppose que  $n$  est un multiple de 7 et on pose  $n = 7k'$ . Prouver qu'alors  $x - 2y$  est aussi un multiple de 7.