Correction du devoir maison de mathématiques n°1

Exercice 1

$$\begin{aligned}
A &= \frac{2\times 3}{5\times 7}\times\frac{(2^2\times 3)^3}{11^2}\times\frac{(7\times 11)^2}{(2\times 5)^3}\\
A &= \frac{2^7\times 3^4\times 7^2\times 11^2}{2^3\times 5^4\times 7\times 11^2}\\
A &= \frac{2^4\times 3^4\times 7}{5^4}\\
A &= \frac{9072}{625}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B &= \sqrt{2\times 3^4\times 5^2\times 17}\\
B &= 3^2\times 5\times\sqrt{2\times 17}\\
B &= 45\sqrt{34}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C &= \frac{11}{2^2\times 3\times 7^2}+\frac{17}{2\times 5\times 7^2}\\
C &= \frac{11\times 5}{2^2\times 3\times 5\times 7^2}+\frac{17\times 2\times 3}{2^2\times 3\times 5\times 7^2}\\
C &= \frac{55}{2940}+\frac{102}{2940}\\
C &= \frac{157}{2940}
\end{aligned}$$

Exercice 2

- Un nombre décimal est un nombre rationnel : vrai ! (un nombre décimal s'écrit $\frac{a}{10^n}$ et est donc un quotient de nombres entiers)
- L'inverse d'un entier relatif non nul est un nombre décimal : faux ! ($\frac{1}{3} = 0,333...$ n'a pas une partie décimale finie)
- L'inverse d'un nombre irrationnel est un nombre irrationnel : vrai ! (l'inverse d'un nombre x irrationnel ne peut pas être un nombre rationnel $\frac{1}{x} = \frac{p}{q}$ car sinon $x = \frac{q}{p}$ serait un nombre rationnel)
- La racine carrée d'un entier naturel est un nombre irrationnel : faux ! ($\sqrt{4} = 2$)

Exercice 3

1. Tous les nombres premiers p excepté 2 sont impairs car il n'admettent pas 2 pour diviseur. En conséquence $p+1$ et $p-1$ sont des entiers pairs donc divisibles par 2. Les nombres a et b sont donc des nombres entiers.
2. $$a^2 - b^2 = \left(\frac{p+1}{2}\right)^2 - \left(\frac{p-1}{2}\right)^2 = \frac{p^2+2p+1}{4} - \frac{p^2-2p+1}{4} = \frac{4p}{4} = p$$
3. Si p est un nombre premier, $p \geqslant 3$ alors $\frac{p+1}{2}$ et $\frac{p-1}{2}$ sont des nombre entiers d'après la question 1 et $p = \left(\frac{p+1}{2}\right)^2 - \left(\frac{p-1}{2}\right)^2$ d'après la question 2.

$$29 = \left(\frac{29+1}{2}\right)^2 - \left(\frac{29-1}{2}\right)^2 = 15^2 - 14^2$$

Exercice 4 *

1. (a) $$\frac{17}{7} = 2,428571428571428571 42\dots$$
   (b) Après la 6$^{\text{e}}$ décimale on retrouve le premier reste de la division, les décimales suivantes seront donc identiques.
2. (a) Le développement décimal de $\frac{17}{7}$ est qualifié de périodique car les décimales sont identiques à 6 rangs d'intervalle.
   (b) En remarquant que $125 = 6 \times 20 + 5$ on peut affirmer que la 125$^{\text{e}}$ et la 5$^{\text{e}}$ décimale de $\frac{17}{7}$ sont identiques. La 125$^{\text{e}}$ décimale de $\frac{17}{7}$ est donc 7.

Exercice 5 *

1. $$126 = 2 \times 3^2 \times 7$$
2. Les valeurs possibles de y pour que le nombre n soit divisible par 2 sont $y = 0, 2, 4, 6, 8$.
3. Voici le tableau des valeurs possibles de x et de y pour que le nombre n divisible par 2 soit aussi divisible par 9 :

y	0	2	4	6	8
x	4	2	0 et 9	7	5

4. Les nombres n précédents sont 41040, 21042, 1044, 91044, 71046 et 51048 parmi lesquels seul 21042 est divisible par 7.
5. Le seul nombre de la forme $n = \overline{x104y}$ divisible par 126 est donc $21042 = 126 \times 167$.

Exercice 6 **

1. $100x = 0,54545454\dots$ donc $100x = 54 + x$. En résolvant cette équation, on obtient un nombre rationnel :
$$x = \frac{54}{99} = \frac{6}{11}$$
2. On pose $y = 0,9999\dots$ d'où $10y = 9 + y$ et enfin $y = 1$.
3. De même :
$$0,27272727\cdots = 0,[27] = \frac{27}{99} = \frac{3}{11}$$
On en déduit :
$$11,27272727\cdots = 11,[27] = 11 + \frac{3}{11} = \frac{124}{11}$$
4. En posant $z = 11,235353535\cdots = 11,2[35]$ on obtient $10z = 112,35353535\cdots = 112,[35]$. On en déduit que :
$$10z = 112 + \frac{35}{99}$$
et enfin :
$$z = \frac{11123}{990}$$

Exercice 7 **

1. $n = 10x + y$
2. On suppose $x - 2y = 7k$. Alors :
$$n = 10x + y = 10(x - 2y) + 21y = 10 \times 7k + 3 \times 7 \times y = 7(10k + 3y)$$
3. On suppose $n = 7k'$. Alors :
$$x - 2y = -2(10x + y) + 21x = -2 \times 7k' + 3 \times 7 \times x = 7(-2k' + 3x)$$