Correction du devoir maison de mathématiques n°2

Exercice 1

1. A partir de la formule $v = gt$, on obtient :

$$t = \frac{v}{g}$$

2. A partir de la formule $d = \frac{1}{2}gt^2$, on obtient :

$$t = \sqrt{\frac{2d}{g}}$$

3. En remplaçant t dans la formule $d = \frac{1}{2}gt^2$ par le résultat de la question 1, on obtient :

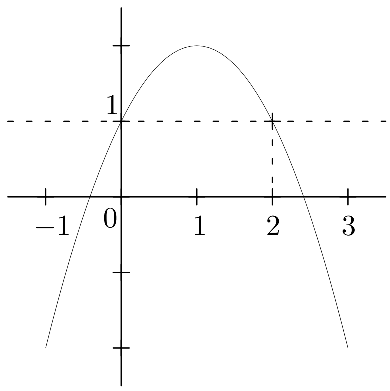
$$\begin{aligned} d &= \frac{1}{2}\,g\left(\frac{v}{g}\right)^2 \\ d &= \frac{v^2}{2g} \end{aligned}$$

4. A partir de cette formule, on obtient :

$$v = \sqrt{2gd}$$

Exercice 2

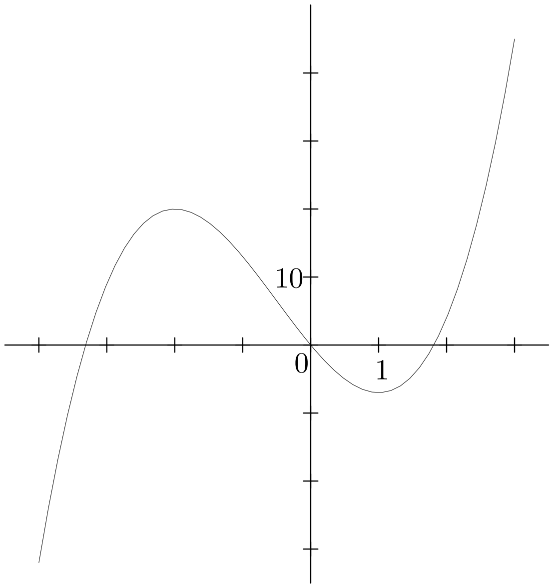
1. La courbe représentative de la fonction f est la suivante :



2. On vérifie graphiquement que les antécédents de 1 par la fonction f sont 0 et 2.
3. On vérifie graphiquement que $f(x) \geqslant 1$ pour $x \in [0; 2]$.

Exercice 3

1. La courbe représentative de la fonction g est la suivante :



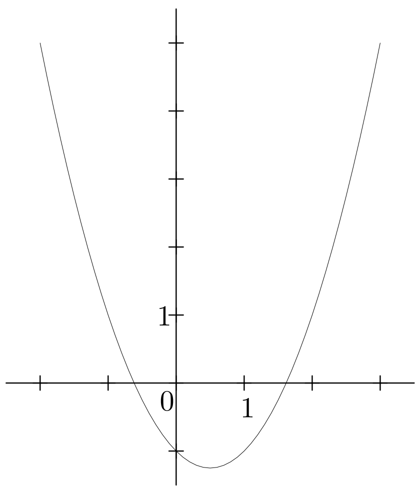
2.
$$\begin{array}{rcl} g(-2) & = & 2 \times (-2)^3 + 3 \times (-2)^2 - 12 \times (-2) = 2 \times (-8) + 3 \times 4 + 24 = 20 \\ g(1) & = & 2 \times 1^3 + 3 \times 1^2 - 12 \times 1 = 2 + 3 - 12 = -7 \end{array}$$

3. Le tableau de variations de la fonction g est le suivant :

x	-4		-2		1		3
			20				45
$g(x)$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	
	-32				-7		

Exercice 4

1. La courbe représentative de la fonction h est la suivante :



2. On utilise plusieurs tableaux de valeurs :

x	-1	$-0,9$	$-0,8$	$-0,7$	$-0,6$	$-0,5$	$-0,4$	$-0,3$	$-0,2$	$-0,1$	0
$h(x)$	...	...	...	0,19	$-0,04$	...	...	...	...	...	...

x	$-0,7$	$-0,69$	$-0,68$	$-0,67$	$-0,66$	$-0,65$	$-0,64$	$-0,63$	$-0,62$	$-0,61$	$-0,6$
$h(x)$	...	...	...	...	...	...	...	...	0,0044	$-0,0179$	...

x	$-0,62$	$-0,619$	$-0,618$	$-0,617$	$-0,616$	...
$h(x)$	...	0,002161	$-7,6.10^{-5}$	...	...	...

La valeur approchée de la solution de l'équation $h(x) = 0$ dans l'intervalle $[-1;0]$ est donc $x \simeq -0,618$. On procède de la même manière dans l'intervalle $[1;2]$ et on obtient comme valeur approchée de la deuxième solution $x \simeq 1,618$.

Exercice 5 *

En utilisant un graphique, on constate que le maximum de la fonction est atteint aux environs de 0,6. A l'aide comme précédemment de tableaux de valeurs, on vérifie que le maximum de la fonction $x \mapsto 2x^3 - 3x^2 - 6x + 10$ sur l'intervalle $[-1;0]$ est environ 12,090 :

...	$-0,619$	$-0,618$	$-0,617$	...
...	12,090164	12,090170	12,090163	...

Exercice 6 **

L'idée est d'étudier sur l'intervalle $[0;10]$ la fonction :

$$x \mapsto 2 + 4x - \frac{x^2}{2} - \frac{50}{x+5}$$

Un graphique montre l'existence de deux valeurs de x pour lesquelles cette fonction s'annule sur l'intervalle $[0;10]$. La première dans l'intervalle $[3;4]$ et l'autre dans l'intervalle $[6,5;7,5]$. En utilisant des tableaux de valeurs on détermine les valeurs approchées suivantes :

$$x_1 \simeq 3,176$$

$$x_2 \simeq 6,977$$

Exercice 7 **

1. $$f(y) - f(x) = [(y-1)^2 + 1] - [(x-1)^2 + 1] = y^2 - x^2 - 2y + 2x$$
2. $$f(y) - f(x) = (y-x)(y+x) - 2(y-x) = (y-x)(y+x-2)$$
3. Si $1 \leqslant x \leqslant y$ alors $y-x \geqslant 0$ et $y+x-2 \geqslant 0$ donc leur produit est positif et $f(y)-f(x) \geqslant 0$.
4. Si $x \leqslant y \leqslant 1$ alors $y-x \geqslant 0$ et $y+x-2 \leqslant 0$ donc leur produit est négatif et $f(y)-f(x) \leqslant 0$.
5. On a donc montré que la fonction f est décroissante sur l'intervalle $]-\infty;1]$ et croissante sur l'intervalle $[1:+\infty[$.