Droites remarquables du triangle

Symétriques de l'orthocentre par rapport aux côtés

Le but de l'exercice est de démontrer que les symétriques de l'orthocentre d'un triangle par rapport aux côtés appartiennent au cercle circonscrit au triangle.

Tracer un triangle ABC, construire son orthocentre H ainsi que son cercle circonscrit de centre O . Placer le point P pied de la hauteur issue de A, le point A' milieu du segment $[BC]$, le point D symétrique du point A par rapport au point O et le point H' intersection de la hauteur issue de A avec le cercle circonscrit. (On pourra prendre pour mesure des côtés : $AB = 7cm$; $AC = 13cm$ et $BC = 12cm$)

1. Démontrer que le quadrilatère $BHCD$ est un parallélogramme.
2. En déduire que le point A' est le milieu du segment $[HD]$.
3. Prouver que les droites (BC) et $(H'D)$ sont parallèles.
4. En déduire que le point P est le milieu du segment $[HH']$.

Droite d'Euler d'un triangle

Le but de l'exercice est de démontrer que le centre de gravité G, l'orthocentre H et le centre O du cercle circonscrit d'un triangle sont alignés sur une droite appelée *droite d'Euler du triangle* et que $OH = 3OG$.

Tracer un triangle ABC, construire les points G, H et O puis placer le point P pied de la hauteur issue de A, le point A' milieu du segment $[BC]$ et le point D symétrique du point A par rapport au point O . (On pourra prendre pour mesure des côtés : $AB = 7cm$; $AC = 13cm$ et $BC = 12cm$)

1. Démontrer que le quadrilatère $BHCD$ est un parallélogramme.
2. En déduire le centre de gravité du triangle AHD .
3. Montrer alors que les points G, H et O sont alignés et que $OH = 3OG$.

Cercle d'Euler d'un triangle

Le but de l'exercice est de démontrer qu'il existe un cercle appelé *cercle des neuf points* ou *cercle d'Euler* qui passe par les milieux des trois côtés, par les pieds des trois hauteurs et par les milieux des segments joignant les sommets à l'orthocentre.

Compléter la figure de l'exercice précédent en plaçant le point E milieu du segment $[OH]$ et le point F milieu du segment $[AH]$.

1. Démontrer que le quadrilatère $A'OFH$ est un parallélogramme de centre E .
2. En déduire que le cercle de centre E passant par A' passe également par F et P .
3. Conclure.