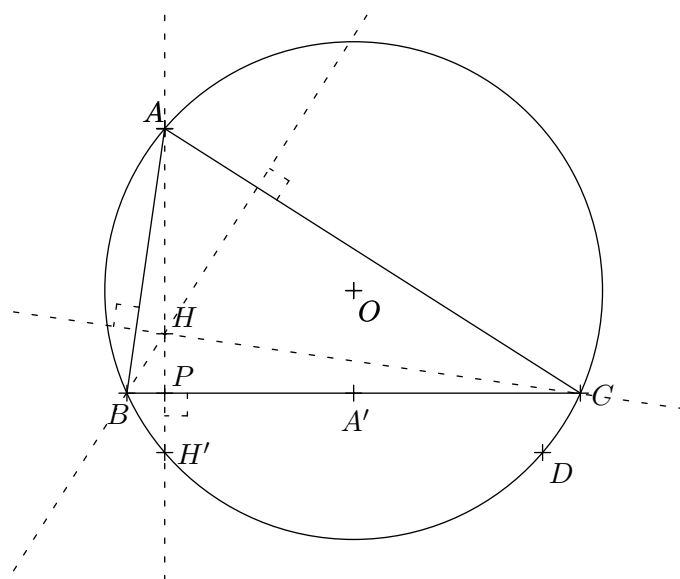


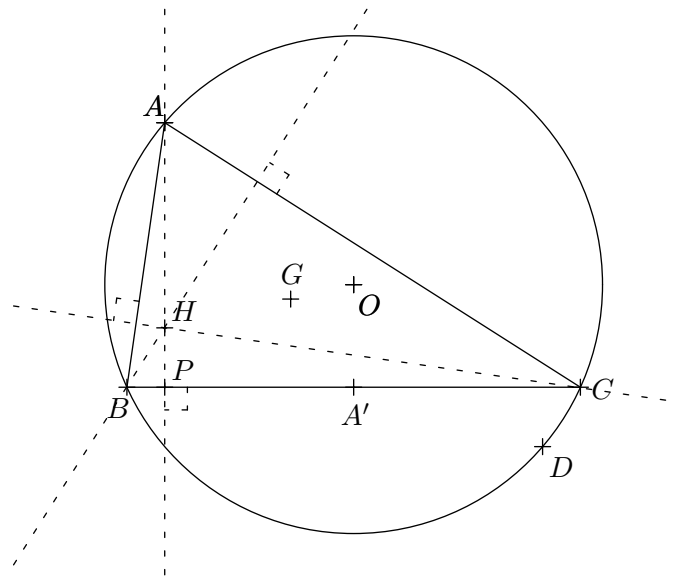
## Droites remarquables du triangle

### Symétriques de l'orthocentre par rapport aux côtés



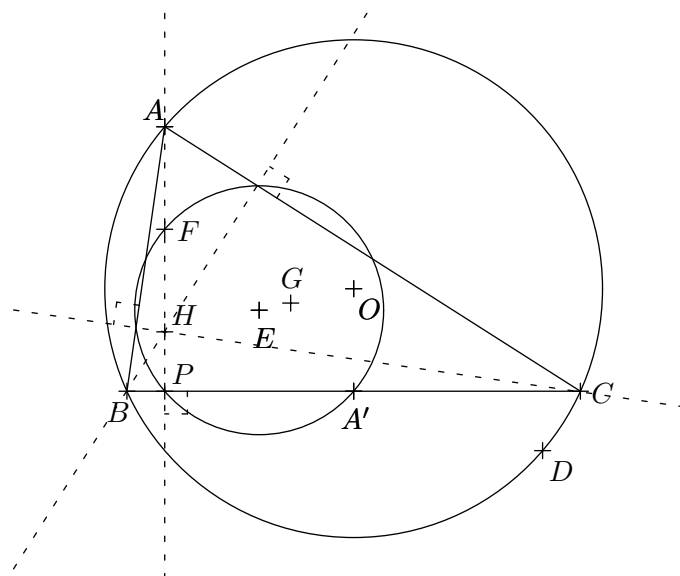
1. La droite  $(CH)$  est perpendiculaire à la droite  $(AB)$  car c'est la hauteur issue de  $C$  du triangle  $ABC$ , la droite  $(BD)$  est perpendiculaire à la droite  $(AB)$  car le triangle  $ADB$  inscrit dans le cercle circonscrit est rectangle en  $B$  son côté  $[AD]$  étant un diamètre. Les droites  $(CH)$  et  $(BD)$  étant perpendiculaires à une même droite sont parallèles. On montre de la même façon que les droites  $(BH)$  et  $(CD)$  sont parallèles, le quadrilatère  $BHCD$  est donc un parallélogramme.
2. Les diagonales d'un parallélogramme se coupent en leurs milieux donc le milieu  $A'$  du segment  $[BC]$  est aussi le milieu du segment  $[HD]$ .
3. La droite  $(BC)$  est perpendiculaire à la hauteur  $(AH')$  issue de  $A$  et la droite  $(H'D)$  est perpendiculaire à la droite  $(AH')$  car le triangle  $ADH'$  inscrit dans le cercle circonscrit est rectangle en  $H'$  son côté  $[AD]$  étant un diamètre. Les droites  $(BC)$  et  $(H'D)$  étant perpendiculaires à une même droite sont parallèles.
4. La droite  $(BC)$  est une droite des milieux du triangle  $HH'D$  car elle passe par le milieu  $A'$  du côté  $[HD]$  et est parallèle au côté  $[H'D]$ , elle passe donc par le milieu du côté  $[HH']$ . Le point  $P$  est donc le milieu du segment  $[HH']$ .

## Droite d'Euler d'un triangle



1. Voir l'exercice précédent.
2. D'après la question précédente,  $A'$  est le milieu du segment  $[HD]$  car les diagonales d'un parallélogramme se coupent en leurs milieux. Le point  $G$  est situé aux deux tiers du segment  $[AA']$  à partir de  $A$  car c'est le centre de gravité du triangle  $ABC$ . C'est donc également le centre de gravité du triangle  $AHD$ .
3. Le point  $O$  étant le milieu du segment  $[AD]$ , on en déduit que  $G$  est situé aux deux tiers du segment  $[HO]$  à partir du point  $H$ .

## Cercle d'Euler d'un triangle



1. La droite  $(FH)$  est perpendiculaire à la droite  $(BC)$  car c'est la hauteur issue de  $A$  du triangle  $ABC$ , la droite  $(OA')$  est perpendiculaire à la droite  $(BC)$  car c'est la médiatrice du segment  $[BC]$ . Les droites  $(FH)$  et  $(OA')$  étant perpendiculaires à une même droite sont parallèles. La droite  $(FO)$  est une droite des milieux du triangle  $AHD$  donc elle est parallèle à la droite  $(HD)$  qui est aussi la droite  $(HA')$ . Le quadrilatère  $A'OFH$  a ses côtés opposés parallèles, c'est donc un parallélogramme de centre  $E$  milieu de  $[OH]$ .
2. Le point  $E$  est donc également le milieu du segment  $[A'F]$  et  $F$  est sur le cercle de centre  $E$  qui passe par  $A'$ . Le triangle  $A'FP$  est rectangle en  $P$  donc son cercle circonscrit est le cercle de diamètre  $[A'F]$  et  $P$  est sur le cercle de centre  $E$  qui passe par  $A'$ .
3. En reproduisant ce raisonnement on démontre que le cercle précédent passe par les neuf points cités dans l'énoncé.