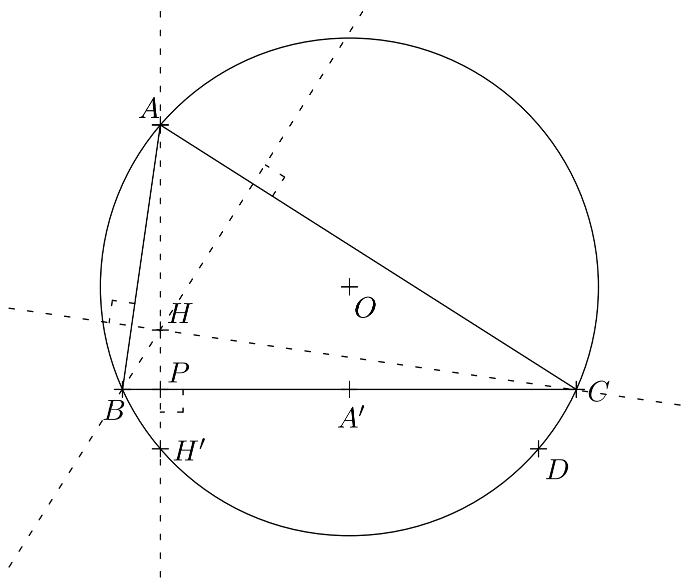
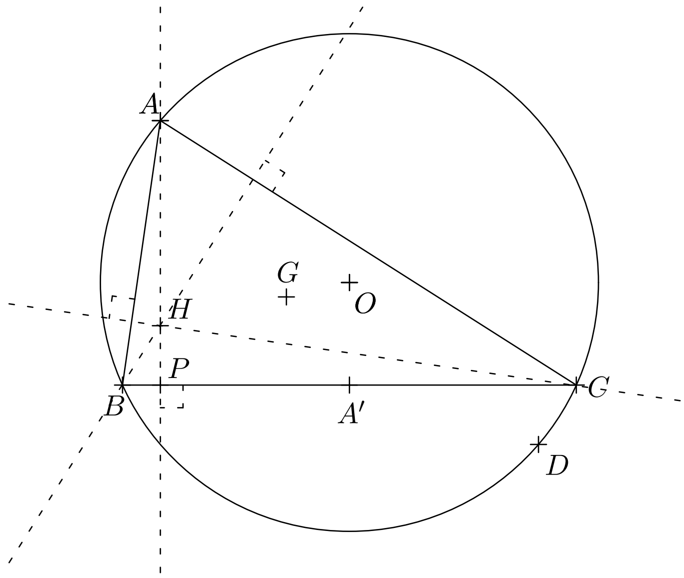
Droites remarquables du triangle

Symétriques de l'orthocentre par rapport aux côtés



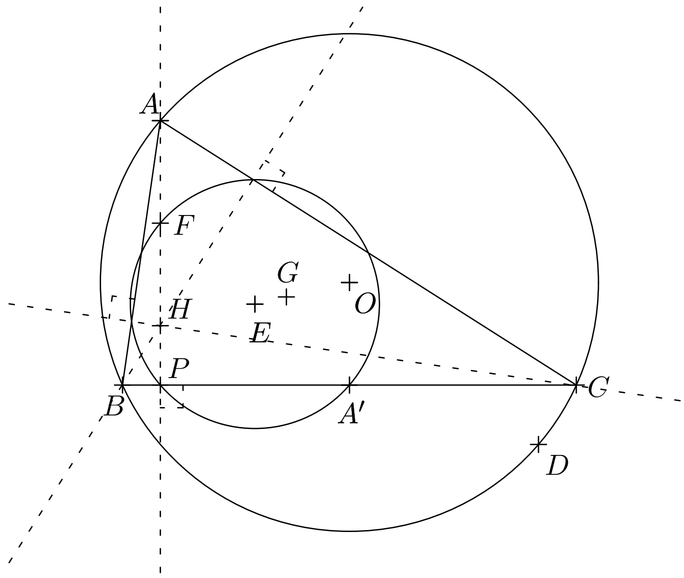
1. La droite (CH) est perpendiculaire à la droite (AB) car c'est la hauteur issue de C du triangle ABC, la droite (BD) est perpendiculaire à la droite (AB) car le triangle ADB inscrit dans le cercle circonscrit est rectangle en B son côté $[AD]$ étant un diamètre. Les droites (CH) et (BD) étant perpendiculaires à une même droite sont parallèles. On montre de la même façon que les droites (BH) et (CD) sont parallèles, le quadrilatère $BHCD$ est donc un parallélogramme.
2. Les diagonales d'un parallélogramme se coupent en leurs milieux donc le milieu A' du segment $[BC]$ est aussi le milieu du segment $[HD]$.
3. La droite (BC) est perpendiculaire à la hauteur (AH') issue de A et la droite $(H'D)$ est perpendiculaire à la droite (AH') car le triangle ADH' inscrit dans le cercle circonscrit est rectangle en H' son côté $[AD]$ étant un diamètre. Les droites (BC) et $(H'D)$ étant perpendiculaires à une même droite sont parallèles.
4. La droite (BC) est une droite des milieux du triangle $HH'D$ car elle passe par le milieu A' du côté $[HD]$ et est parallèle au côté $[H'D]$, elle passe donc par le milieu du côté $[HH']$. Le point P est donc le milieu du segment $[HH']$.

Droite d'Euler d'un triangle



1. Voir l'exercice précédent.
2. D'après la question précédente, A' est le milieu du segment $[HD]$ car les diagonales d'un parallélogramme se coupent en leurs milieux. Le point G est situé aux deux tiers du segment $[AA']$ à partir de A car c'est le centre de gravité du triangle ABC. C'est donc également le centre de gravité du triangle AHD
3. Le point O étant le milieu du segment $[AD]$, on en déduit que G est situé aux deux tiers du segment $[HO]$ à partir du point H.

Cercle d'Euler d'un triangle



1. La droite (FH) est perpendiculaire à la droite (BC) car c'est la hauteur issue de A du triangle ABC, la droite (OA') est perpendiculaire à la droite (BC) car c'est la médiatrice du segment $[BC]$. Les droites (FH) et (OA') étant perpendiculaires à une même droite sont parallèles. La droite (FO) est une droite des milieux du triangle AHD donc elle est parallèle à la droite (HD) qui est aussi la droite (HA'). Le quadrilatère $A'OFH$ a ses côtés opposés parallèles, c'est donc un parallélogramme de centre E milieu de $[OH]$.
2. Le point E est donc également le milieu du segment $[A'F]$ et F est sur le cercle de centre E qui passe par A' . Le triangle $A'FP$ est rectangle en P donc son cercle circonscrit est le cercle de diamètre $[A'F]$ et P est sur le cercle de centre E qui passe par A' .
3. En reproduisant ce raisonnement on démontre que le cercle précédent passe par les neuf points cités dans l'énoncé.