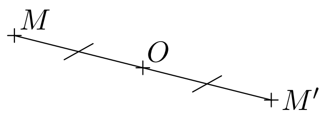
Transformations du plan

1 Définition des transformations du plan

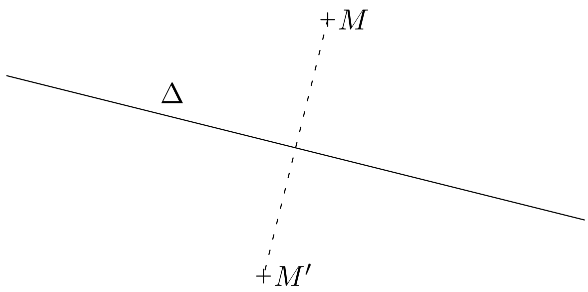
Définition. *Le point M' est l'image du point M par la symétrie centrale de centre O si O est le milieu du segment $[MM']$.*



$$s_O : M \mapsto M'$$

Propriété. *La symétrie de centre O admet le point O pour seul point invariant.*

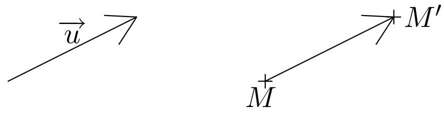
Définition. *Le point M' est l'image du pont M par la symétrie axiale d'axe Δ si la droite Δ est la médiatrice du segment $[MM']$.*



$$s_\Delta : M \mapsto M'$$

Propriété. *La symétrie axiale d'axe Δ admet pour points invariants tous les points de Δ .*

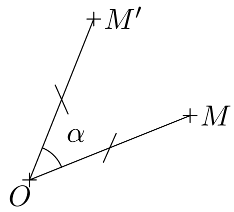
Définition. *Le point M' est l'image du pont M par la translation de vecteur $\overrightarrow{u}$ si $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{u}$.*



$$T_{\overrightarrow{u}} : M \mapsto M'$$

Propriété. *La translation de vecteur $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$ n'admet aucun point invariant.*

Définition. *Le point M' est l'image du pont M par la rotation de centre O et d'angle α si $OM = OM'$ et $\widehat{MOM'} = \alpha$.*



$$R_{O,\alpha} : M \mapsto M'$$

Propriété. *La rotation de centre O et d'angle $\alpha \neq 0$ admet le point O pour seul point invariant.*

2 Propriétés des transformations du plan

Propriété. *Les symétries centrales, axiales, les translations et les rotations conservent les longueurs :*

$$\begin{array}{rcl} M & \mapsto & M' \\ P & \mapsto & P' \\ \text{alors } MP & = & M'P' \end{array}$$

On les appelle des isométries.

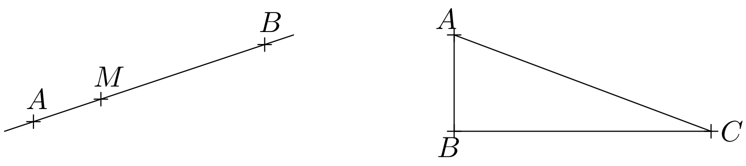
Démonstration. admis □

Théorème. *Une isométrie conserve l'alignement, le parallélisme, l'orthogonalité et les angles géométriques.*

Démonstration. Nous allons simplement donner une idée de la preuve, à savoir la transcription des propriétés d'alignement et d'orthogonalité en termes d'égalités de longueurs :

$$M \in [AB] \Leftrightarrow AM + MB = AB$$

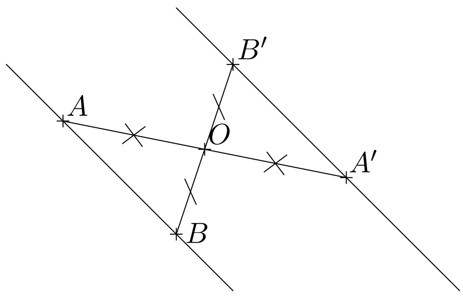
$$ABC \text{ rectangle en } B \Leftrightarrow AB^2 + BC^2 = AC^2$$



□

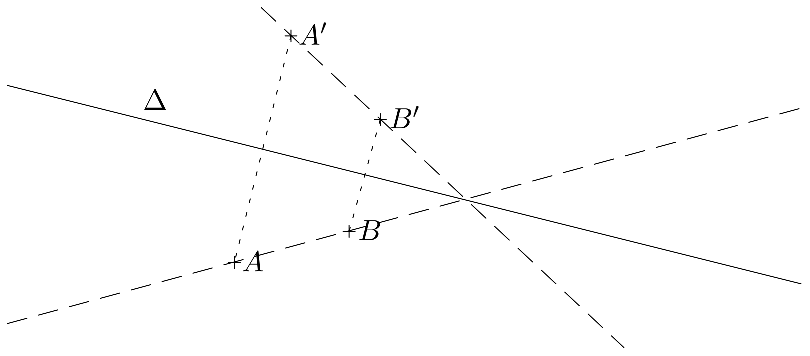
Considérons à présent l'image d'une droite par les différentes transformations du plan :

Propriété. *L'image d'une droite $\mathcal{D}$ par une symétrie centrale est une droite parallèle à $\mathcal{D}$.*



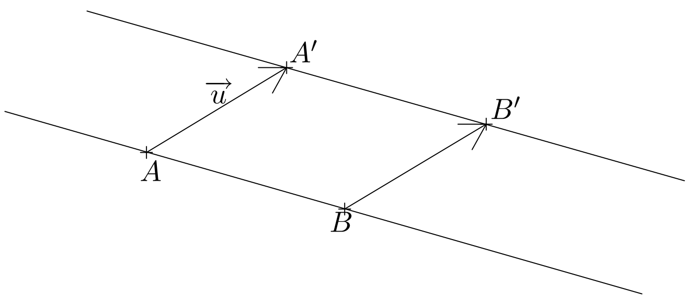
Démonstration. Les diagonales du quadrilatère $ABA'B'$ se coupent en leurs milieux, c'est donc un parallélogramme ce qui entraîne $(AB)//(A'B')$. □

Propriété. *L'image par une symétrie axiale d'axe Δ d'une droite $\mathcal{D}$ non parallèle à Δ est une droite qui passe par le point d'intersection des droites $\mathcal{D}$ et Δ .*



Démonstration. La symétrie axiale conserve l'alignement donc le point d'intersection des droites (AB) et Δ qui est invariant sera aussi sur $(A'B')$. □

Propriété. *L'image d'une droite $\mathcal{D}$ par une translation est une droite parallèle à $\mathcal{D}$.*



Démonstration. Par définition de la translation, $ABB'A'$ est un parallélogramme ce qui entraîne donc $(AB)//(A'B')$. □