

## Démonstrations par les aires

### Théorème des milieux

On considère un triangle quelconque  $ABC$  et on appelle  $M$  le milieu du segment  $[AB]$ . La droite parallèle à la droite  $(BC)$  passant par le point  $M$  coupe le segment  $[AC]$  en  $N$ .

1. Prouver que les triangles  $AMN$  et  $BMN$  ont même aire.
2. Prouver que les triangles  $BMN$  et  $CMN$  ont même aire.
3. En déduire que les triangles  $AMN$  et  $CMN$  ont même aire.
4. Prouver que le point  $N$  est le milieu du segment  $[AC]$ .

### Théorème de Thalès

On considère un triangle quelconque  $ABC$  et deux points  $M$  et  $N$  situés respectivement sur les côtés  $[AB]$  et  $[AC]$  tels que  $(MN) \parallel (BC)$ . La droite parallèle à la droite  $(AB)$  passant par le point  $N$  coupe le segment  $[BC]$  en un point  $P$ .

1. Prouver que le rapport des aires des triangles  $AMN$  et  $BMN$  est égal au rapport  $\frac{AM}{MB}$ .  
Prouver que le rapport des aires des triangles  $AMN$  et  $CMN$  est égal au rapport  $\frac{AN}{NC}$ .
2. Prouver que les triangles  $BMN$  et  $CMN$  ont la même aire.
3. En déduire que  $\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC}$  puis que  $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$ .
4. Montrer de la même manière que  $\frac{CN}{NA} = \frac{CP}{PB}$ .
5. En déduire que  $\frac{MN}{BC} = \frac{AN}{AC}$ .
6. Conclure.

### Théorème de Pythagore

On considère un triangle  $ABC$  rectangle en  $A$  et on construit extérieurement les carrés  $ABDE$ ,  $ACFG$  et  $BCHI$ . La droite perpendiculaire à la droite  $(BC)$  passant par le point  $A$  coupe le segment  $[BC]$  en  $J$  et le segment  $[HI]$  en  $K$ .

1. Prouver que les triangles  $BDE$  et  $BCD$  ont même aire.
2. Prouver que les triangles  $BCD$  et  $ABI$  ont même aire.
3. En déduire que les triangles  $BDE$  et  $BIJ$  ont même aire.
4. Montrer que l'aire du carré  $ABDE$  est égale à l'aire du rectangle  $BIKJ$ .
5. Montrer que l'aire du carré  $ACFG$  est égale à l'aire du rectangle  $CHKJ$ .
6. Conclure.