Démonstrations par les aires

Théorème des milieux

On considère un triangle quelconque ABC et on appelle M le milieux du segment $[AB]$. La droite parallèle à la droite (BC) passant par le point M coupe le segment $[AC]$ en N.

1. Prouver que les triangles AMN et BMN ont même aire.
2. Prouver que les triangles BMN et CMN ont même aire.
3. En déduire que les triangles AMN et CMN ont même aire.
4. Prouver que le point N est le milieu du segment $[AC]$.

Théorème de Thalès

On considère un triangle quelconque ABC et deux points M et N situés respectivement sur les côtés $[AB]$ et $[AC]$ tels que $(MN)//(BC)$. La droite parallèle à la droite (AB) passant par le point N coupe le segment $[BC]$ en un point P.

1. Prouver que le rapport des aires des triangles AMN et BMN est égal au rapport $\frac{AM}{MB}$.
   Prouver que le rapport des aires des triangles AMN et CMN est égal au rapport $\frac{AN}{NC}$.
2. Prouver que les triangles BMN et CMN ont la même aire.
3. En déduire que $\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC}$ puis que $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$.
4. Montrer de la même manière que $\frac{CN}{NA} = \frac{CP}{PB}$.
5. En déduire que $\frac{MN}{BC} = \frac{AN}{AC}$.
6. Conclure.

Théorème de Pythagore

On considère un triangle ABC rectangle en A et on construit extérieurement les carrés $ABDE$, $ACFG$ et $BCHI$. La droite perpendiculaire à la droite (BC) passant par le point A coupe le segment $[BC]$ en J et le segment $[HI]$ en K.

1. Prouver que les triangles BDE et BCD ont même aire.
2. Prouver que les triangles BCD et ABI ont même aire.
3. En déduire que les triangles BDE et BIJ ont même aire.
4. Montrer que l'aire du carré $ABDE$ est égale à l'aire du rectangle $BIKJ$.
5. Montrer que l'aire du carré $ACFG$ est égale à l'aire du rectangle $CHKJ$.
6. Conclure