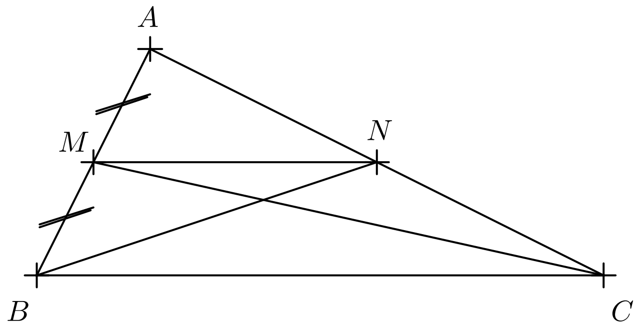
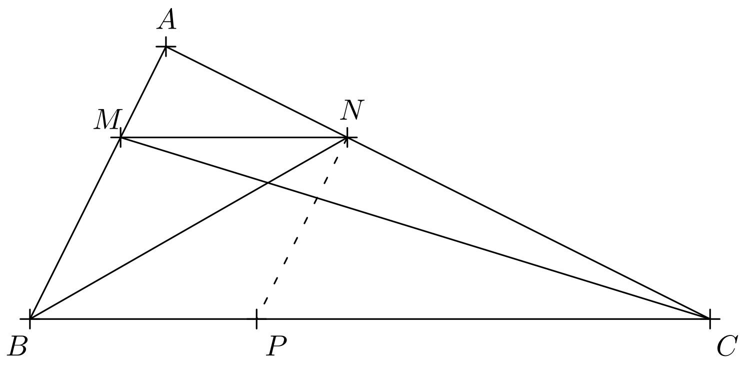
Démonstrations par les aires

Théorème des milieux



1. Les triangles AMN et BMN ont même hauteur issue de N et leurs bases sont de même longueur donc ils ont même aire.
2. Les triangles BMN et CMN ont même base $[MN]$ et leurs hauteurs issues respectivement de B et C sont égales car $(MN)//(BC)$ donc ils ont même aire.
3. D'après les questions qui précèdent, les triangles AMN et CMN ont même aire.
4. Ces deux triangles ont même hauteur issue de M donc leurs bases associées sont de même longueur et par conséquent le point N est le milieu du segment $[AC]$.

Théorème de Thalès



1. Les triangles AMN et BMN ont même hauteur issue de N donc le rapport de leurs aires est égal au rapport de leurs bases associées soit $\frac{AM}{MB}$. De même, le rapport des aires des triangles AMN et CMN est égal au rapport $\frac{AN}{NC}$.
2. Les triangles BMN et CMN ont même base $[MN]$ et leurs hauteurs issues respectivement de B et C sont égales car $(MN)//(BC)$ donc ils ont même aire.
3. D'après les questions qui précèdent, $\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC}$ donc :

$$\begin{aligned}
\frac{AM}{AB - AM} &= \frac{AN}{AC - AN} \\
AM \times (AC - AN) &= AN \times (AB - AM) \\
AM \times AC &= AN \times AB \\
\frac{AM}{AB} &= \frac{AN}{AC}
\end{aligned}$$

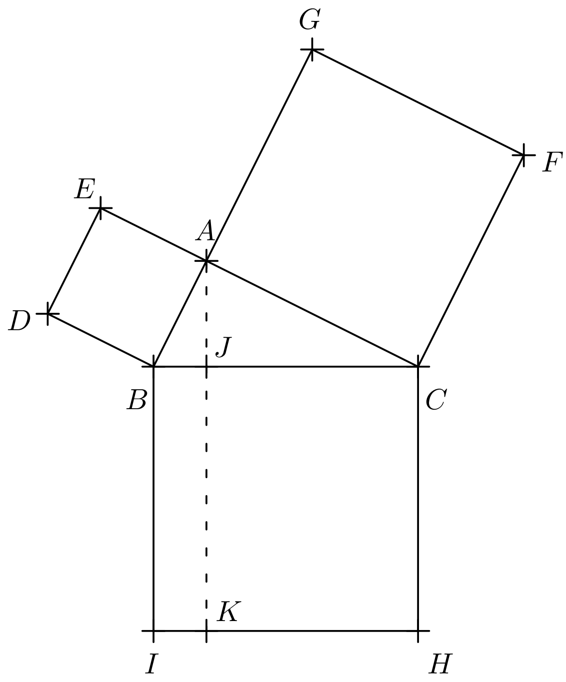
4. De la même manière en considérant la droite (NP) parallèle à la droite (AB), on peut montrer que $\frac{CN}{NA} = \frac{CP}{PB}$.
5. On en déduit que $\frac{CN}{NA} = \frac{CP}{MN}$ car le quadrilatère $BMNP$ est un parallélogramme, d'où ;

$$\begin{aligned}
\frac{AC - AN}{AN} &= \frac{BC - MN}{MN} \\
\frac{AC}{AN} - 1 &= \frac{BC}{MN} - 1 \\
\frac{AN}{AC} &= \frac{MN}{BC}
\end{aligned}$$

6. On a montré que :

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$$

Théorème de Pythagore



1. Les triangles BDE et BCD ont même base $[BD]$ et même hauteur associée car $(BD)//(EC)$ donc ils ont même aire.
2. Les triangles BCD et ABI sont isométriques car $BD = BA$, $BC = BI$ et $\widehat{DBC} = \widehat{ABI}$ donc ils ont même aire.
3. Les triangles ABI et BIJ ont même aire car ils ont même base $[BI]$ et même hauteur associée donc d'aprés ce qui précède, les triangles BDE et BIJ ont même aire.
4. On en déduit que l'aire du carré $ABDE$ est égale à l'aire du rectangle $BIKJ$.
5. De la même façon, on montre que l'aire du carré $ACFG$ est égale à l'aire du rectangle $CHKJ$.
6. Finalement, on a montré que l'aire du carré $BCHI$ est égale à la somme des aires des carrés $ABDE$ et $ACFG$, soit $BC^2 = AB^2 + AC^2$.