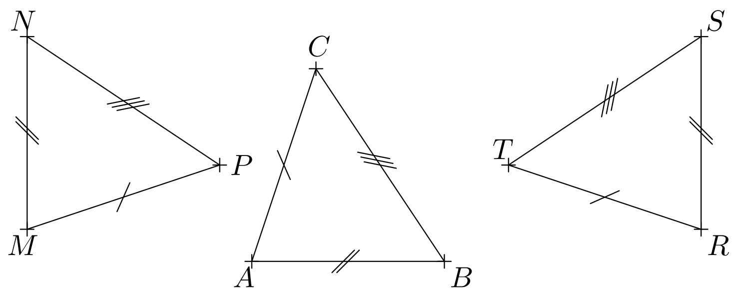
Triangles isométriques

1 Triangles isométriques

Définition. *Deux triangles sont dits isométriques si leurs côtés sont égaux deux à deux.*



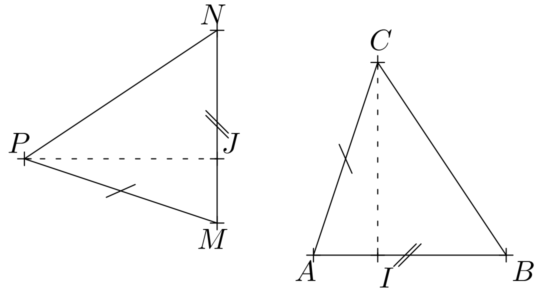
Les triangles ABC et RST sont directement isométriques et les triangles ABC et MNP indirectement isométriques.

Propriété. *Si deux triangles sont isométriques, il existe une isométrie qui permet de passer de l'un à l'autre. En conséquence, une isométrie conservant les angles, les angles de deux triangles isométriques sont égaux.*

Démonstration. admis. □

Propriété 1. *Deux triangles dont deux côtés sont égaux deux à deux ainsi que les angles compris entre ces côtés sont isométriques.*

Démonstration. Considérons deux triangles ABC et MNP tels que $AB = MN$, $AC = MP$ et $\widehat{BAC} = \widehat{NMP}$:



Soient I le pied de la hauteur issue de C dans le triangle ABC et J le pied de la hauteur issue de P dans le triangle MNP . Dans le triangle AIC rectangle en I, on a :

$$IC = AC \times \sin \widehat{BAC}$$

Dans le triangle MPJ rectangle en J, on a :

$$JP = MP \times \sin \widehat{NMP}$$

En utilisant les hypothèses, on obtient donc : $IC = JP$. On montre de la même façon que $JM = IA$ donc $JN = IB$.

Dans le triangle BIC rectangle en I, d'après le théorème de Pythagore :

$$BC^2 = IC^2 + IB^2$$

Dans le triangle PJN rectangle en J, d'après le théorème de Pythagore :

$$PN^2 = JP^2 + JN^2$$

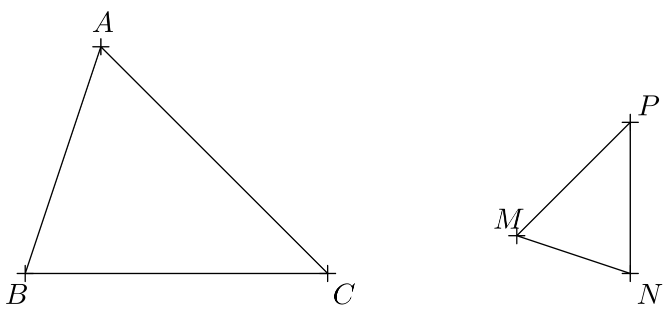
On obtient donc : $BC = PN$. Les triangles ABC et MNP sont isométriques. □

Propriété 2. *Deux triangles dont deux côtés sont égaux ainsi que leurs angles adjacents deux à deux sont isométriques.*

Démonstration. même principe que pour la propriété précédente. □

2 Triangles de même forme

Définition. *Deux triangles sont dits de même forme (ou semblables) si leurs angles sont égaux deux à deux.*



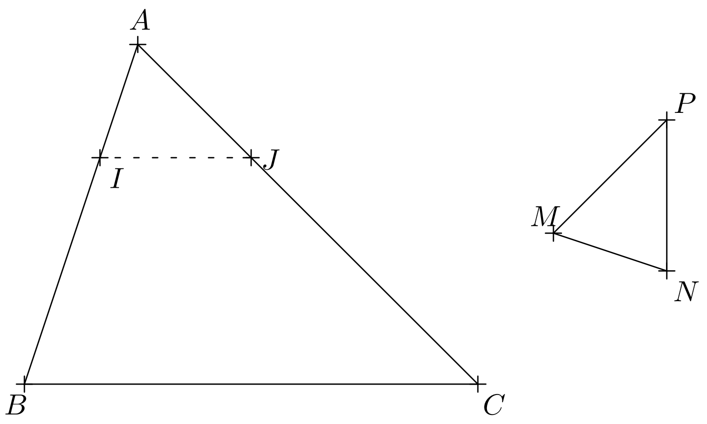
$$\begin{aligned}\widehat{BAC} &= \widehat{NMP}\\ \widehat{ABC} &= \widehat{MNP}\\ \widehat{ACB} &= \widehat{MPN}\end{aligned}$$

Propriété. *Deux triangles sont de même forme si et seulement si leurs côtés sont proportionnels :*

$$ABC \text{ et } MNP \text{ de même forme avec } \widehat{A} = \widehat{M},\ \widehat{B} = \widehat{N},\ \widehat{C} = \widehat{P} \Leftrightarrow \frac{AB}{MN} = \frac{BC}{NP} = \frac{AC}{MP} = k$$

Le rapport k est appelé coefficient d'agrandissement ou de réduction.

Démonstration. Considérons deux triangles ABC et MNP de même forme :



Plaçons sur la demi-droite $[AB)$ le point I tel que $AI = MN$ et sur la demi-droite $[AC)$ le point J tel que $AJ = MP$. Comme $\widehat{BAC} = \widehat{NMP}$, les triangles MNP et AIJ sont isométriques donc $IJ = NP$ et de plus $\widehat{AIJ} = \widehat{MNP}$ donc les droites (IJ) et (BC) sont parallèles.

On peut donc appliquer le théorème de Thalès dans le triangle ABC :

$$\frac{AI}{AB} = \frac{AJ}{AC} = \frac{IJ}{BC}$$

D'où :

$$\frac{MN}{AB} = \frac{MP}{AC} = \frac{NP}{BC}$$

Pour la réciproque, il suffit d'utiliser cette fois la réciproque du théorème de Thalès : on en déduit que les droites (IJ) et (BC) sont parallèles et que $IJ = NP$, les triangles ABC et AIJ ont donc les mêmes angles et les triangles AIJ et MNP les mêmes longueurs. Les triangles AIJ et MNP sont donc isométriques et sont donc de même forme, on en déduit que les triangles ABC et MNP sont de même forme. □