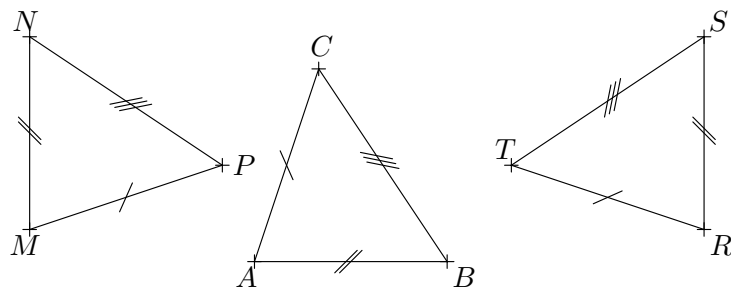


## Triangles isométriques

### 1 Triangles isométriques

**Définition.** Deux triangles sont dits isométriques si leurs côtés sont égaux deux à deux.



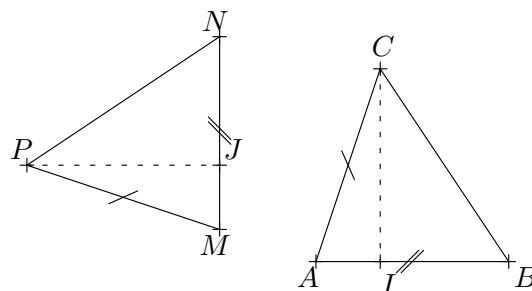
Les triangles  $ABC$  et  $RST$  sont directement isométriques et les triangles  $ABC$  et  $MNP$  indirectement isométriques.

**Propriété.** Si deux triangles sont isométriques, il existe une isométrie qui permet de passer de l'un à l'autre. En conséquence, une isométrie conservant les angles, les angles de deux triangles isométriques sont égaux.

*Démonstration.* admis. □

**Propriété 1.** Deux triangles dont deux côtés sont égaux deux à deux ainsi que les angles compris entre ces côtés sont isométriques.

*Démonstration.* Considérons deux triangles  $ABC$  et  $MNP$  tels que  $AB = MN$ ,  $AC = MP$  et  $\widehat{BAC} = \widehat{NMP}$  :



Soient  $I$  le pied de la hauteur issue de  $C$  dans le triangle  $ABC$  et  $J$  le pied de la hauteur issue de  $P$  dans le triangle  $MNP$ . Dans le triangle  $AIC$  rectangle en  $I$ , on a :

$$IC = AC \times \sin \widehat{BAC}$$

Dans le triangle  $MPJ$  rectangle en  $J$ , on a :

$$JP = MP \times \sin \widehat{NMP}$$

En utilisant les hypothèses, on obtient donc :  $IC = JP$ . On montre de la même façon que  $JM = IA$  donc  $JN = IB$ .

Dans le triangle  $BIC$  rectangle en  $I$ , d'après le théorème de Pythagore :

$$BC^2 = IC^2 + IB^2$$

Dans le triangle  $PJN$  rectangle en  $J$ , d'après le théorème de Pythagore :

$$PN^2 = JP^2 + JN^2$$

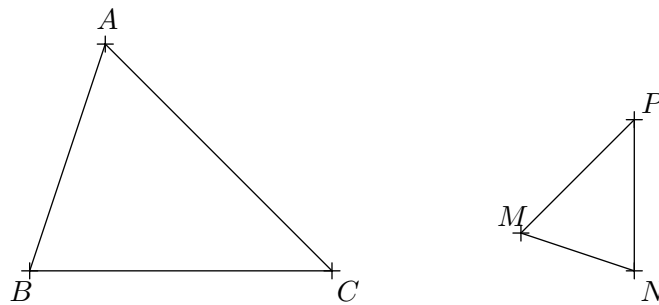
On obtient donc :  $BC = PN$ . Les triangles  $ABC$  et  $MNP$  sont isométriques. □

**Propriété 2.** Deux triangles dont deux côtés sont égaux ainsi que leurs angles adjacents deux à deux sont isométriques.

*Démonstration.* même principe que pour la propriété précédente. □

## 2 Triangles de même forme

**Définition.** Deux triangles sont dits de même forme (ou semblables) si leurs angles sont égaux deux à deux.



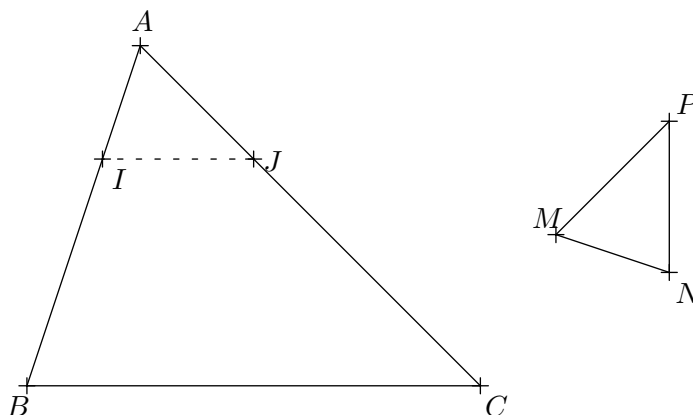
$$\begin{aligned} \widehat{BAC} &= \widehat{NMP} \\ \widehat{ABC} &= \widehat{MNP} \\ \widehat{ACB} &= \widehat{MPN} \end{aligned}$$

**Propriété.** Deux triangles sont de même forme si et seulement si leurs côtés sont proportionnels :

$$ABC \text{ et } MNP \text{ de même forme avec } \widehat{A} = \widehat{M}, \widehat{B} = \widehat{N}, \widehat{C} = \widehat{P} \Leftrightarrow \frac{AB}{MN} = \frac{BC}{NP} = \frac{AC}{MP} = k$$

Le rapport  $k$  est appelé coefficient d'agrandissement ou de réduction.

*Démonstration.* Considérons deux triangles  $ABC$  et  $MNP$  de même forme :



Plaçons sur la demi-droite  $[AB)$  le point  $I$  tel que  $AI = MN$  et sur la demi-droite  $[AC)$  le point  $J$  tel que  $AJ = MP$ . Comme  $\widehat{BAC} = \widehat{NMP}$ , les triangles  $MNP$  et  $AIJ$  sont isométriques donc  $IJ = NP$  et de plus  $\widehat{AIJ} = \widehat{MNP}$  donc les droites  $(IJ)$  et  $(BC)$  sont parallèles.

On peut donc appliquer le théorème de Thalès dans le triangle  $ABC$  :

$$\frac{AI}{AB} = \frac{AJ}{AC} = \frac{IJ}{BC}$$

D'où :

$$\frac{MN}{AB} = \frac{MP}{AC} = \frac{NP}{BC}$$

Pour la réciproque, il suffit d'utiliser cette fois la réciproque du théorème de Thalès : on en déduit que les droites  $(IJ)$  et  $(BC)$  sont parallèles et que  $IJ = NP$ , les triangles  $ABC$  et  $AIJ$  ont donc les mêmes angles et les triangles  $AIJ$  et  $MNP$  les mêmes longueurs. Les triangles  $AIJ$  et  $MNP$  sont donc isométriques et sont donc de même forme, on en déduit que les triangles  $ABC$  et  $MNP$  sont de même forme.  $\square$