

Encadrement décimal des racines carrées

Propriété. Soient a et b deux nombres réels positifs, alors $a \leq b$ si et seulement si $a^2 \leq b^2$.

Exercice 1

1. On a $3^2 \leq 11 \leq 4^2$ donc d'après la propriété ci-dessus :

$$3 \leq \sqrt{11} \leq 4$$

2. On remarque que $3\sqrt{2} = \sqrt{18}$ et $4^2 \leq 18 \leq 5^2$ donc d'après la propriété :

$$4 \leq 3\sqrt{2} \leq 5$$

On en déduit que :

$$3 \leq 3\sqrt{2} - 1 \leq 4$$

Exercice 2

1. On remarque que $5\sqrt{3} = \sqrt{75}$ et $8^2 \leq 75 \leq 9^2$ donc :

$$8 \leq 5\sqrt{3} \leq 9$$

On obtient alors en retranchant 2 :

$$6 \leq 5\sqrt{3} - 2 \leq 7$$

2. On remarque que $7\sqrt{3} = \sqrt{147}$ et $12^2 \leq 147 \leq 13^2$ donc :

$$12 \leq 7\sqrt{3} \leq 13$$

D'où :

$$-12 \geq -7\sqrt{3} \geq -13$$

soit dans l'ordre croissant :

$$-13 \leq -7\sqrt{3} \leq -12$$

On obtient alors en ajoutant 20 :

$$7 \leq 20 - 7\sqrt{3} \leq 8$$

Exercice 3

1. On remarque que $10\sqrt{2} = \sqrt{200}$ et que $14^2 \leq 200 \leq 15^2$ donc :

$$14 \leq 10\sqrt{2} \leq 15$$

2. On en déduit en divisant par 10 :

$$1,4 \leq \sqrt{2} \leq 1,5$$

Exercice 4

1. On remarque que $10\sqrt{3} = \sqrt{300}$ et que $17^2 \leq 300 \leq 18^2$ donc :

$$17 \leq 10\sqrt{3} \leq 18$$

On en déduit en divisant par 10 :

$$1,7 \leq \sqrt{3} \leq 1,8$$

2. La subtilité ici est que des encadrements à l'unité de $\sqrt{2}$ et $2\sqrt{3}$ ne permettent d'obtenir qu'un encadrement à deux unités près de $\sqrt{2} + 2\sqrt{3}$!

Nous allons donc devoir être plus précis :

$$(\sqrt{2} + 2\sqrt{3})^2 = (\sqrt{2})^2 + (2\sqrt{3})^2 + 2 \times \sqrt{2} \times 2\sqrt{3} = 14 + 4\sqrt{6}$$

Or $4\sqrt{6} = \sqrt{96}$ et $9^2 \leq 96 \leq 10^2$ donc :

$$23 \leq 14 + 4\sqrt{6} \leq 24$$

A fortiori :

$$4^2 \leq 14 + 4\sqrt{6} \leq 5^2$$

Donc :

$$4 \leq \sqrt{2} + 2\sqrt{3} \leq 5$$