Encadrement décimal des racines carrées

Propriété. *Soient a et b deux nombres réels positifs, alors* $a \leqslant b$ *si et seulement si* $a^2 \leqslant b^2$.

Exercice 1

1. On a $3^2 \leqslant 11 \leqslant 4^2$ donc d'après la propriété ci-dessus :

$$3 \leqslant \sqrt{11} \leqslant 4$$

2. On remarque que $3\sqrt{2} = \sqrt{18}$ et $4^2 \leqslant 18 \leqslant 5^2$ donc d'après la propriété :

$$4 \leqslant 3\sqrt{2} \leqslant 5$$

   On en déduit que :

$$3 \leqslant 3\sqrt{2} - 1 \leqslant 4$$

Exercice 2

1. On remarque que $5\sqrt{3} = \sqrt{75}$ et $8^2 \leqslant 75 \leqslant 9^2$ donc :

$$8 \leqslant 5\sqrt{3} \leqslant 9$$

   On obtient alors en retranchant 2 :

$$6 \leqslant 5\sqrt{3} - 2 \leqslant 7$$

2. On remarque que $7\sqrt{3} = \sqrt{147}$ et $12^2 \leqslant 147 \leqslant 13^2$ donc :

$$12 \leqslant 7\sqrt{3} \leqslant 13$$

   D'où :

$$-12 \geqslant -7\sqrt{3} \geqslant -13$$

   soit dans l'ordre croissant :

$$-13 \leqslant -7\sqrt{3} \leqslant -12$$

   On obtient alors en ajoutant 20 :

$$7 \leqslant 20 - 7\sqrt{3} \leqslant 8$$

Exercice 3

1. On remarque que $10\sqrt{2} = \sqrt{200}$ et que $14^2 \leqslant 200 \leqslant 15^2$ donc :

$$14 \leqslant 10\sqrt{2} \leqslant 15$$

2. On en déduit en divisant par 10 :

$$1,4 \leqslant \sqrt{2} \leqslant 1,5$$

Exercice 4

1. On remarque que $10\sqrt{3} = \sqrt{300}$ et que $17^2 \leqslant 300 \leqslant 18^2$ donc :

$$17 \leqslant 10\sqrt{3} \leqslant 18$$

On en déduit en divisant par 10 :

$$1,7 \leqslant \sqrt{3} \leqslant 1,8$$

2. La subtilité ici est que des encadrements à l'unité de $\sqrt{2}$ et $2\sqrt{3}$ ne permettent d'obtenir qu'un encadrement à deux unités près de $\sqrt{2} + 2\sqrt{3}$!

Nous allons donc devoir être plus préçis :

$$(\sqrt{2} + 2\sqrt{3})^2 = (\sqrt{2})^2 + (2\sqrt{3})^2 + 2 \times \sqrt{2} \times 2\sqrt{3} = 14 + 4\sqrt{6}$$

Or $4\sqrt{6} = \sqrt{96}$ et $9^2 \leqslant 96 \leqslant 10^2$ donc :

$$23 \leqslant 14 + 4\sqrt{6} \leqslant 24$$

A fortiori :

$$4^2 \leqslant 14 + 4\sqrt{6} \leqslant 5^2$$

Donc :

$$4 \leqslant \sqrt{2} + 2\sqrt{3} \leqslant 5$$