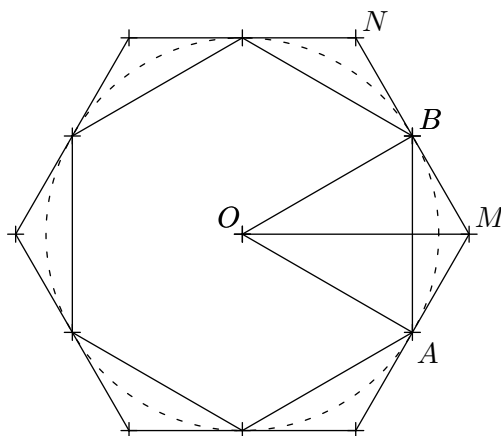


## Encadrement de $\pi$ par la méthode d'Archimède

On rappelle que le nombre  $\pi$  est défini comme le rapport du périmètre du cercle à son diamètre. L'idée d'Archimède est d'approcher le cercle par des polygones réguliers, le calcul de leurs périmètres permettra d'en déduire un encadrement de  $\pi$ .

### Encadrement obtenu par l'utilisation d'hexagones

On considère un cercle de rayon 1 approché par deux hexagones selon la figure suivante :



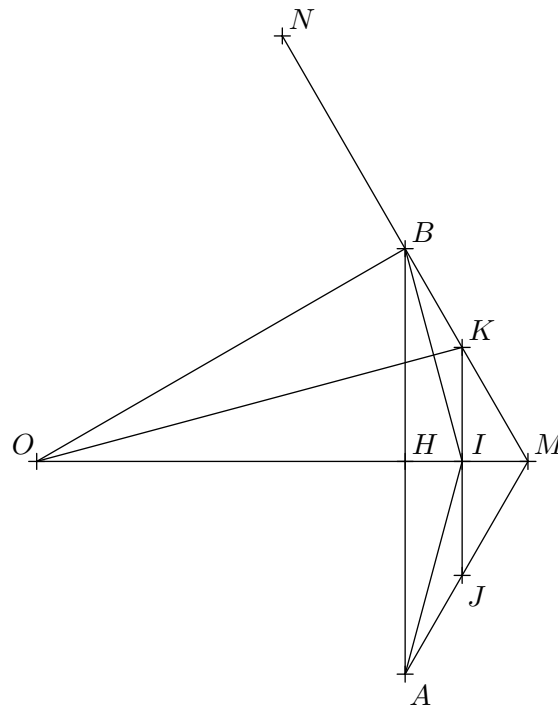
1. Calculer les longueurs  $AB$  et  $MN$  des côtés des hexagones inscrit et circonscrit.
2. En déduire les périmètres des hexagones inscrit et circonscrit puis un encadrement de  $\pi$ .

### Doublement du nombre de côtés des polygones

Nous allons à présent étudier l'opération consistant à doubler le nombre de côtés des polygones inscrit et circonscrit.

Soient  $u = AB$  et  $v = MN$  les longueurs respectives des côtés des polygones à  $n$  côtés inscrit et circonscrit et  $x = BI$  et  $y = JK$  les longueurs respectives des côtés des polygones à  $2n$  côtés associés.(figure page suivante)

Nous allons exprimer  $x$  et  $y$  en fonction de  $u$  et  $v$ .



1. Montrer que les triangles  $BOM$  et  $BOH$  sont semblables. En déduire que  $OM = \frac{v}{u}$ .
2. Montrer que les triangles  $BOM$  et  $IKM$  sont semblables. En déduire que :

$$y = 4 \left( \frac{1}{u} - \frac{1}{v} \right)$$

(On pourra remarquer que  $IM = OM - 1$ )

3. Montrer que les triangles  $AIB$  et  $KIB$  sont semblables. En déduire que  $x = \sqrt{\frac{uy}{2}}$  puis :

$$x = \sqrt{2 \left( 1 - \frac{u}{v} \right)}$$

## Encadrements décimaux de $\pi$

1. En utilisant les formules démontrées précédemment, calculer à l'aide de la calculatrice une valeur approchée des longueurs des côtés des polygones à 12 côtés inscrit et circonscrit. En déduire un encadrement de  $\pi$  par des nombres décimaux.
2. Poursuivre la démarche pour les polygones inscrit et circonscrit à 24, 48 et 96 côtés.