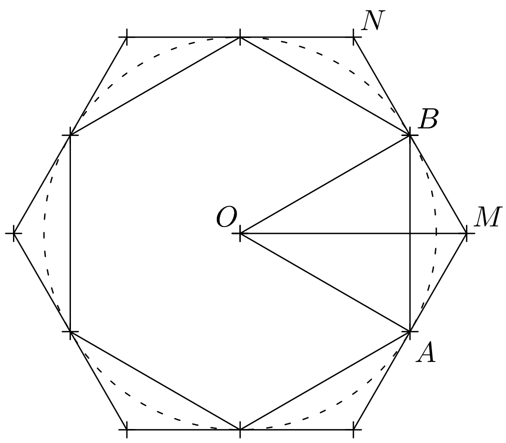
Encadrement de π par la méthode d'Archimède

On rappelle que le nombre π est défini comme le rapport du périmètre du cercle à son diamètre. L'idée d'Archimède est d'approcher le cercle par des polygones réguliers, le calcul de leurs périmètres permettra d'en déduire un encadrement de π.

Encadrement obtenu par l'utilisation d'hexagones

On considère un cercle de rayon 1 approché par deux hexagones selon la figure suivante :



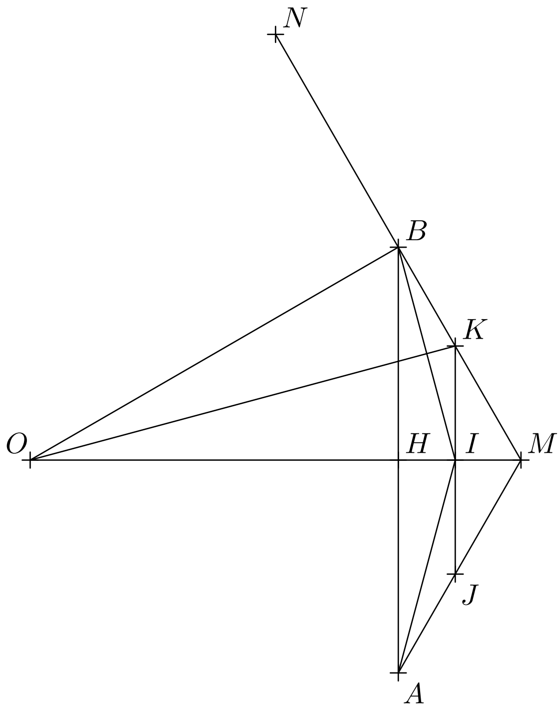
1. Calculer les longueurs AB et MN des côtés des hexagones inscrit et circonscrit.
2. En déduire les périmètres des hexagones inscrit et circonscrit puis un encadrement de π.

Doublement du nombre de côtés des polygones

Nous allons à présent étudier l'opération consistant à doubler le nombre de côtés des polygones inscrit et circonscrit.

Soient $u = AB$ et $v = MN$ les longueurs respectives des côtés des polygones à n côtés inscrit et circonscrit et $x = BI$ et $y = JK$ les longueurs respectives des côtés des polygones à $2n$ côtés associés.(figure page suivante)

Nous allons exprimer x et y en fonction de u et v.



1. Montrer que les triangles BOM et BOH sont semblables. En déduire que $OM = \frac{v}{u}$.
2. Montrer que les triangles BOM et IKM sont semblables. En déduire que :

$$y = 4\left(\frac{1}{u} - \frac{1}{v}\right)$$

(On pourra remarquer que $IM = OM - 1$)

3. Montrer que les triangles AIB et KIB sont semblables. En déduire que $x = \sqrt{\frac{uy}{2}}$ puis :

$$x = \sqrt{2\left(1 - \frac{u}{v}\right)}$$

Encadrements décimaux de π

1. En utilisant les formules démontrées précédemment, calculer à l'aide de la calculatrice une valeur approchée des longueurs des côtés des polygones à 12 côtés inscrit et circonscrit. En déduire un encadrement de π par des nombres décimaux.
2. Poursuivre la démarche pour les polygones inscrit et circonscrit à 24, 48 et 96 côtés.