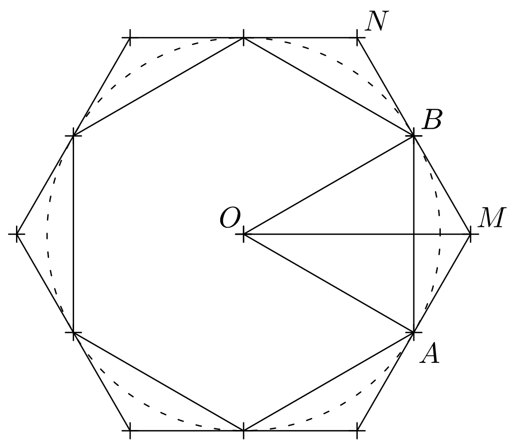
Encadrement de π par la méthode d'Archimède

Encadrement obtenu par l'utilisation d'hexagones

On considère un cercle de rayon 1 approché par deux hexagones selon la figure suivante :



1. Le triangle OAB est équilatéral donc :

$$AB = OA = 1$$

Le triangle OMN est équilatéral donc $MN = OM$, on applique le théorème de Pythagore dans le triangle OBM rectangle en B :

$$OM^2 = OB^2 + BM^2$$

d'où :

$$\begin{aligned} MN^2 &= 1^2 + \left(\frac{MN}{2}\right)^2 \\ MN^2 &= \frac{4}{3} \\ MN &= \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \end{aligned}$$

2. Les périmètres des hexagones inscrit et circonscrit s'obtiennent en multipliant par le nombre de côtés :

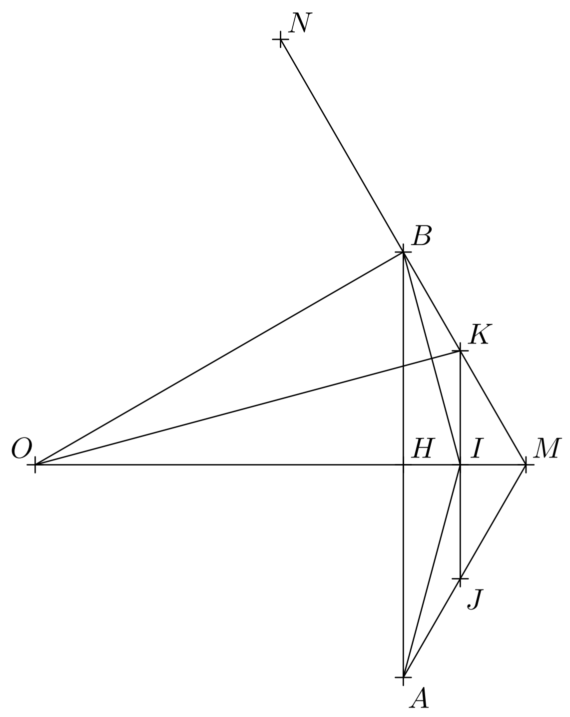
$$\begin{aligned} P_{inscrit} &= 6 \\ P_{circonscrit} &= 4\sqrt{3} \end{aligned}$$

En divisant par le diamètre, on obtient un encadrement de π :

$$3 \leqslant \pi \leqslant 2\sqrt{3}$$

Doublement du nombre de côtés des polygones

On considère la figure suivante avec $u = AB$, $v = MN$, $x = BI$ et $y = JK$:



1. Les triangles BOM et BOH sont rectangles et ont l'angle $\widehat{BOM}$ en commun donc ils sont semblables. On en déduit que :
$$\frac{OM}{OB} = \frac{BM}{BH}$$
d'où :
$$\frac{OM}{1} = \frac{v/2}{u/2}$$
et :
$$OM = \frac{v}{u}$$

2. La droite (OK) est la bissectrice de l'angle $\widehat{BOM}$ donc :
$$\widehat{BOM} = 2 \times \widehat{BOK}$$
d'où :
$$\widehat{BKO} = 90° - \widehat{BOK} = 90° - \frac{\widehat{BOM}}{2}$$
et :
$$\widehat{IKM} = 180° - 2 \times \widehat{BKO} = \widehat{BOM}$$
Comme nous avons montré que $\widehat{HBM} = \widehat{BOM}$, nous avons $\widehat{HBM} = \widehat{IKM}$ ce qui prouve que les droites (AB) et (JK) sont parallèles et que le triangle IKM est rectangle.

Les triangles rectangles IKM et BOM ont l'angle $\widehat{OMB}$ en commun, ils sont donc semblables.

On en déduit que :

$$\frac{BO}{BM} = \frac{IK}{IM} = \frac{IK}{OM-1}$$

d'où :

$$\frac{1}{v/2} = \frac{y/2}{v/u-1}$$

et :

$$y = 4\left(\frac{1}{u} - \frac{1}{v}\right)$$

3. On a :

$$\widehat{BIA} = 2 \times \widehat{BIO} = 180° - \widehat{IOB}$$

de plus, d'après la question précédente :

$$\widehat{BKI} = 2 \times \widehat{BKO} = 180° - \widehat{BOM}$$

donc :

$$\widehat{BIA} = \widehat{BKI}$$

Les triangles AIB et KIB sont isocèles et leur sommets principaux sont de même mesure, ils sont donc semblables.

On en déduit que :

$$\frac{BI}{BK} = \frac{BA}{BI}$$

d'où :

$$\frac{x}{y/2} = \frac{u}{x}$$

et :

$$x = \sqrt{\frac{uy}{2}}$$

on obtient alors en remplaçant y :

$$x = \sqrt{2\left(1 - \frac{u}{v}\right)}$$

Encadrements décimaux de π

1. Pour les polygones à 6 côtés, on a :

$$\begin{array}{rcl} u & = & 1 \\ v & = & \frac{2\sqrt{3}}{3} \quad \simeq \quad 1,15470 \end{array}$$

En utilisant les formules précédentes, on obtient donc pour les polygones à 12 côtés :

$$\begin{array}{rcl} x & \simeq & 0,51764 \\ y & \simeq & 0,53590 \end{array}$$

D'où l'encadrement suivant :

$$3,10583 \leqslant \pi \leqslant 3,21539$$

2. Voici les résultats obtenus en poursuivant la démarche pour les polygones inscrit et circonscrit à 24, 48 et 96 côtés :

n	côté du polygone inscrit	côté du polygone circonscrit	encadrement
6	1	1,15470	$3 \leqslant \pi \leqslant 3,46410$
12	0,51764	0,53590	$3,10583 \leqslant \pi \leqslant 3,21539$
24	0,26105	0,26330	$3,13263 \leqslant \pi \leqslant 3,15966$
48	0,13081	0,13109	$3,13935 \leqslant \pi \leqslant 3,14609$
96	0,06544	0,06547	$3,14103 \leqslant \pi \leqslant 3,14271$