Ordre dans $\mathbb{R}$-(In)équations

1 Ordre sur les nombres réels

Définition. *Soient $a, b \in \mathbb{R}$. On dit que a est inférieur ou égal à b (resp. a est supérieur ou égal à b) et on note $a \leqslant b$ (resp. $a \geqslant b$) si $b - a$ est positif (resp. $b - a$ est négatif).*

Exemple. *$\frac{7}{8}$ est inférieur à $\frac{8}{9}$ car : $\frac{8}{9} - \frac{7}{8} = \frac{8\times 8 - 7\times 9}{9\times 8} = \frac{1}{72} \geqslant 0$*

Propriétés.
- *Ajouter ou soustraire un même nombre aux deux membres d'une inégalité conserve l'ordre : Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$. Si $a \leqslant b$ alors $a + c \leqslant b + c$.*
- *Multiplier ou diviser par un réel strictement positif les deux membres d'une inégalité conserve l'ordre : Soient $a, b, c \in \mathbb{R};\ c > 0$. Si $a \leqslant b$ alors $ac \leqslant bc$ et $\frac{a}{c} \leqslant \frac{b}{c}$.*
- *Multiplier ou diviser par un réel strictement négatif les deux membres d'une inégalité change l'ordre : Soient $a, b, c \in \mathbb{R};\ c < 0$. Si $a \leqslant b$ alors $ac \geqslant bc$ et $\frac{a}{c} \geqslant \frac{b}{c}$.*

Démonstration. On se ramène à une étude de signe :

$$\begin{array}{rcl} (b+c) - (a+c) & = & b - a \\ bc - ac & = & c(b-a) \\ \dfrac{b}{c} - \dfrac{a}{c} & = & \dfrac{b-a}{c} \end{array}$$

$\square$

Application. *Résolution de l'inéquation : $2x + 3 \leqslant 5x - 4$*

$$\begin{array}{rcl} 2x + 3 - 3 & \leqslant & 5x - 4 - 3 \\ 2x & \leqslant & 5x - 7 \\ 2x - 5x & \leqslant & 5x - 7 - 5x \\ -3x & \leqslant & -7 \\ \dfrac{-3x}{-3} & \geqslant & \dfrac{-7}{-3} \\ x & \geqslant & \dfrac{7}{3} \end{array}$$

Propriété. *Soient $a, b \geqslant 0$, alors $a \leqslant b$ si et seulement si $a^2 \leqslant b^2$.*

Démonstration.
- Supposons que $a \leqslant b$ alors $b^2 - a^2 = (b-a)(b+a)$ est positif et donc $a^2 \leqslant b^2$.
- Supposons que $a^2 \leqslant b^2$ alors comme $b^2 - a^2 = (b-a)(b+a)$, $\ b - a$ est positif et donc $a \leqslant b$.

$\square$

Application. *Comparer* $3\sqrt{3}$ *et* $4+\sqrt{3}$.
On remarque que :

$$\begin{array}{rcl}(3\sqrt{3})^2 & = & 27\\ (4+\sqrt{3})^2 & = & 19+8\sqrt{3} \geqslant 27\end{array}$$

Donc $3\sqrt{3} \leqslant 4+\sqrt{3}$.

Propriété. *Si* $a \geqslant 1$ *alors* $a \leqslant a^2 \leqslant a^3$. *Si* $0 \leqslant a \leqslant 1$ *alors* $a \geqslant a^2 \geqslant a^3$.

Démonstration. On remarque que : $a^2 - a = a(a-1)$
- Si $a \geqslant 1$ alors $a \geqslant 0$ et $a-1 \geqslant 0$ donc $a^2 - a \geqslant 0$ et $a^2 \geqslant a$.
- Si $0 \leqslant a \leqslant 1$ alors $a \geqslant 0$ et $a-1 \leqslant 0$ donc $a^2 - a \leqslant 0$ et $a^2 \leqslant a$.

On remarque que : $a^3 - a^2 = a^2(a-1)$
- Si $a \geqslant 1$ alors $a-1 \geqslant 0$ donc $a^3 - a^2 \geqslant 0$ et $a^3 \geqslant a^2$.
- Si $0 \leqslant a \leqslant 1$ alors $a-1 \leqslant 0$ donc $a^3 - a^2 \leqslant 0$ et $a^3 \leqslant a^2$.

□

Définition. *Soit* $x \in \mathbb{R}$, *on définit la* valeur absolue *de* x *par :*

$$|x| = \left\{\begin{array}{rcl} x & si & x \geqslant 0\\ -x & si & x \leqslant 0\end{array}\right.$$

Remarque. *La valeur absolue d'un nombre est parfois appelée* distance à zéro*, c'est un réel positif.*

Exemple. $|-1,5| = |1,5| = 1,5$

Interprétation graphique. *Soit* $\mathcal{D}$ *une droite graduée d'origine* O*, d'unité 1cm et* M *un point de la droite* $\mathcal{D}$ *d'abscisse* x*. Alors* $OM = |x|$.

Définition. *Soient* $x, y \in \mathbb{R}$. *On définit la distance de* x *à* y *par :*

$$d(x,y) = |y-x| = |x-y|$$

Interprétation graphique. *Soit* $\mathcal{D}$ *une droite graduée d'origine* O*, d'unité 1cm et* A, B *deux points de la droite* $\mathcal{D}$ *d'abscisses* x *et* y *. Alors* $AB = |y-x|$.

2 Équations-Inéquations

2.1 Intervalles de $\mathbb{R}$

On définit les différents intervalles de $\mathbb{R}$ de la façon suivante :

intervalles bornés			intervalles non bornés		
fermé	$a \leqslant x \leqslant b$	$x \in [a; b]$	fermé	$a \leqslant x$	$x \in [a; +\infty[$
ouvert	$a < x < b$	$x \in]a; b[$	$a < x$	ouvert	$x \in]a; +\infty[$
mixte	$a < x \leqslant b$	$x \in]a; b]$	fermé	$x \leqslant b$	$x \in]-\infty; b]$
mixte	$a \leqslant x < b$	$x \in [a; b[$	$x < b$	ouvert	$x \in]-\infty; b[$

- Un intervalle vide se note $\varnothing$.
- Un intervalle réduit à un point a se note $\{a\}$.

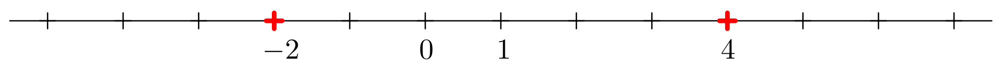
Définition. *L'*intersection *de deux intervalles est l'ensemble des nombres appartenant au premier* et *au deuxième intervalle, elle se note $[a; b] \cap [c; d]$.*

Définition. *La* réunion *de deux intervalles est l'ensemble des nombres appartenant au premier* ou *au deuxième intervalle, elle se note $[a; b] \cup [c; d]$.*

2.2 Équations et Inéquations avec valeur absolue

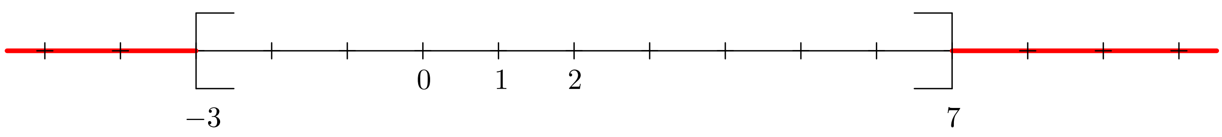
Pour résoudre une équation ou inéquation avec valeur absolue, on l'interprète en terme de distance :

Exemple 1. *L'équation $|x - 1| = 3$ a pour solutions les nombres x dont la distance à 1 est 3 :*



Les solutions sont $x = -2$ et $x = 4$, l'ensemble des solutions se note $S = \{-2; 4\}$.

Exemple 2. *L'inéquation $|x - 2| > 5$ a pour solutions les nombres x dont la distance à 2 est strictement supérieure à 5 :*



L'ensemble des solutions est $S =]-\infty\ ;\ -3[\cup]7;\ ;\ +\infty[$.

2.3 Équations et Inéquations produit

Définition. *Soit f une fonction de la variable x définie sur $\mathcal{D}$, on appelle tableau de signes de f sur $\mathcal{D}$ un tableau donnant le signe de $f(x)$ en fonction de x ainsi que les valeurs de x pour lesquelles $f(x) = 0$.*

Exemple. *tableau de signes de $f(x) = (3x-1)(x-4)$:*

x	$-\infty$		$\frac{1}{3}$		4		$+\infty$
$3x-1$		$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	
$x-4$		$-$	$\vert$	$-$	0	$+$	
$(3x-1)(x-4)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Pour résoudre une inéquation $A(x) \leqslant B(x)$ on étudie le signe de $B(x) - A(x)$.

Exemple. *On désire résoudre l'inéquation :*

$$\frac{x-1}{2-x} \leqslant 2$$

Cette inéquation est équivalente à :

$$\begin{aligned} \tfrac{x-1}{2-x} - 2 &\leqslant 0 \\ \tfrac{(x-1)-2(2-x)}{2-x} &\leqslant 0 \\ \tfrac{3x-5}{2-x} &\leqslant 0 \end{aligned}$$

x	$-\infty$		$\frac{5}{3}$		2		$+\infty$
$3x-5$		$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	
$2-x$		$+$	$\vert$	$+$	0	$-$	
$\frac{3x-5}{2-x}$		$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	

On remarque que 2 *est une* valeur interdite*, l'ensemble des solutions de l'inéquation de départ est $S =]-\infty\ ;\ \frac{5}{3}] \cup]2\ ;\ +\infty[$.*