Correction du devoir maison de mathématiques n°4

Exercice 1

$$\frac{9}{17} = \frac{9 \times 23}{17 \times 23} = \frac{207}{391} \quad \text{et} \quad \frac{13}{23} = \frac{13 \times 17}{23 \times 17} = \frac{221}{391} \quad \text{donc} \quad \frac{9}{17} < \frac{13}{23}$$

$$3,14 = \frac{314}{100} = \frac{314 \times 7}{100 \times 7} = \frac{2198}{700} \quad \text{et} \quad \frac{22}{7} = \frac{22 \times 100}{7 \times 100} = \frac{2200}{700} \quad \text{donc} \quad \frac{22}{7} > 3,14$$

$$(\sqrt{5}-2)^2 = (\sqrt{5})^2 + 2^2 - 2 \times 2 \times \sqrt{5} = 5 + 4 - 4\sqrt{5} = 9 - 4\sqrt{5} \quad \text{et} \quad \left(\sqrt{9-4\sqrt{5}}\right)^2 = 9 - 4\sqrt{5}$$

$$\text{donc} \quad \sqrt{5} - 2 = \sqrt{9 - 4\sqrt{5}}$$

Exercice 2

On procède par étapes :

$$\begin{array}{ccccc} -1 & \leqslant & x & \leqslant & 3 \\ -2 & \leqslant & 2x & \leqslant & 6 \\ -9 & \leqslant & 2x-7 & \leqslant & -1 \end{array}$$

De la même façon :

$$\begin{array}{ccccc} -1 & \leqslant & x & \leqslant & 3 \\ 3 & \geqslant & -3x & \geqslant & -9 \\ 8 & \geqslant & 5-3x & \geqslant & -4 \\ -4 & \leqslant & 5-3x & \leqslant & 8 \end{array}$$

Exercice 3

$$\begin{array}{ccc} 3x+5 & \geqslant & -6 \\ 3x & \geqslant & -11 \\ x & \geqslant & -\frac{11}{3} \end{array}$$

L'ensemble des solutions est $S = [-\frac{11}{3}\ ;\ +\infty[$.

$$\begin{array}{ccc} 5+x & < & 5x-3 \\ 5 & < & 4x-3 \\ 8 & < & 4x \\ 2 & < & x \end{array}$$

L'ensemble des solutions est $S =]2\ ;\ +\infty[$.

Exercice 4

x	$-\infty$		$\frac{1}{5}$		$\frac{2}{3}$		$+\infty$
$5x-1$		$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	
$2-3x$		$+$	$\vert$	$+$	0	$-$	
$(5x-1)(2-3x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
-5		$-$	$\vert$	$-$	$\vert$	$-$	
x		$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	
$2-x$		$+$	$\vert$	$+$	0	$-$	
$\frac{-5}{x(2-x)}$		$+$	$\Vert$	$-$	$\Vert$	$+$	

Exercice 5

x	$-\infty$		0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$-3x$		$+$	0	$-$	$\vert$	$-$	
$2x-1$		$-$	$\vert$	$-$	0	$+$	
$-3x(2x-1)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

L'ensemble des solutions de l'inéquation $-3x(2x-1) \leqslant 0$ est donc $S =]-\infty\ ;\ 0] \cup [\frac{1}{2}\ ;\ +\infty[$.

x	$-\infty$		2		4		$+\infty$
$4-x$		$+$	$\vert$	$+$	0	$-$	
$2-x$		$+$	0	$-$	$\vert$	$-$	
$\frac{4-x}{2-x}$		$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	

L'ensemble des solutions de l'inéquation $\frac{4-x}{2-x} > 0$ est donc $S =]-\infty\ ;\ 2[\cup]4\ ;\ +\infty[$.

Exercice 6

$$]-\infty\ ;\ 5[\cup]-2\ ;\ 7[=]-\infty\ ;\ 7[$$

$$[-3\ ;\ 0[\cap [-1\ ;\ +\infty[= [-1\ ;\ 0[$$

Exercice 7

Les solutions de l'inéquation $|x-2| > 4,5$ sont les nombres dont la distance à 2 est strictement supérieure à $4,5$ soit $S =]-\infty\ ;\ -2,5[\cup]6,5\ ;\ +\infty[$.

Les solutions de l'inéquation $|x-(-3,1)| \leqslant 2$ sont les nombres dont la distance à $-3,1$ est inférieure ou égale à 2 soit $S = [-5,1\ ;\ -1,1]$.

Exercice 8 *

L'ensemble des solutions de l'inéquation $|x-2|<3$ est $]-1\ ;\ 5[$ et l'ensemble des solutions de l'inéquation $2x-5\leqslant 3$ est $]-\infty\ ;\ 4]$ donc l'ensemble des solutions du système formé par ces deux inéquations est :

$$S =]-1\ ;\ 5[\ \cap\ ]-\infty\ ;\ 4]\ =]-1\ ;\ 4]$$

L'ensemble des solutions de l'inéquation $x-7\leqslant 2x+1$ est $[-8\ ;\ +\infty[$ et l'ensemble des solutions de l'inéquation $2x+1<5x+3$ est $]-\frac{2}{3}\ ;\ +\infty[$ donc l'ensemble des solutions du système formé par ces deux inéquations est :

$$S = [-8\ ;\ +\infty[\ \cap\ ]-\frac{2}{3}\ ;\ +\infty[\ =\ ]-\frac{2}{3}\ ;\ +\infty[$$

Exercice 9 **

L'ensemble des solutions de l'inéquation $1<|x+3|$ est $]-\infty\ ;\ -4]\cup]-2\ ;\ +\infty[$ et l'ensemble des solutions de l'inéquation $|x+3|\leqslant 2$ est $[-5\ ;\ -1]$ donc l'ensemble des solutions du système formé par ces deux inéquations est l'intersection de ces deux ensembles soit :

$$S = [-5\ ;\ -4[\ \cup\ ]-2\ ;\ -1]$$

L'inéquation $\dfrac{1-x}{1+x}\geqslant 2$ est équivalente à $\dfrac{1-x}{1+x}-2\geqslant 0$.

Or :

$$\frac{1-x}{1+x}-2=\frac{1-x}{1+x}-\frac{2+2x}{1+x}=\frac{-1-3x}{1+x}$$

On en déduit au moyen d'un tableau de signes que l'ensemble des solutions est :

$$S =]-1\ ;\ -\frac{1}{3}]$$

L'inéquation $\dfrac{1}{(x+3)^2}\leqslant 1$ est équivalente à $\dfrac{1}{(x+3)^2}-1\leqslant 0$.

Or :

$$\frac{1}{(x+3)^2}-1=\left(\frac{1}{x+3}-1\right)\left(\frac{1}{x+3}+1\right)=\frac{(-x-2)(x+4)}{(x+3)^2}$$

On en déduit au moyen d'un tableau de signes que l'ensemble des solutions est :

$$S =]-\infty\ ;\ -4]\ \cup\ [-2\ ;\ +\infty[$$

Exercice 10 **

Il faut prouver que :

$$1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2}}}} < \sqrt{2} < 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2}}}}}$$

Soit après calculs :

$$\frac{41}{29} < \sqrt{2} < \frac{99}{70}$$

Ceci est bien vérifié car :

$$\left(\frac{41}{29}\right)^2 = \frac{1681}{841} < \frac{1682}{841} = 2$$

et :

$$\left(\frac{99}{70}\right)^2 = \frac{9801}{4900} > \frac{9800}{4900} = 2$$