Fonctions affines

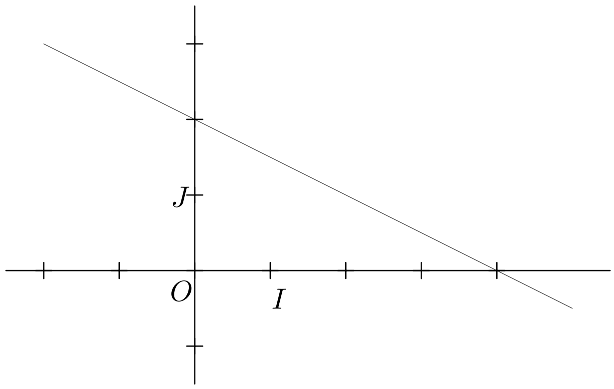
Définition. *On appelle fonction affine une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ vérifiant $f(x) = ax + b$ avec $a, b \in \mathbb{R}$.*

Si $b = 0$, la fonction $f : x \mapsto ax$ est une fonction linéaire*.*

Si $a = 0$, la fonction $f : x \mapsto b$ est une fonction constante*.*

Propriété. *La courbe représentative d'une fonction affine $f : x \mapsto ax + b$ est une droite de* coefficient directeur *a et d'*ordonnée à l'origine *b.*

Exemple. *La courbe représentative de la fonction affine $f(x) = -\frac{1}{2}x + 2$ est la suivante :*



Propriété. *Une fonction affine $f : x \mapsto ax + b$ est croissante si $a > 0$, décroissante si $a < 0$ et constante si $a = 0$.*

Démonstration. Soient $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ avec $x_1 \leqslant x_2$.

Si $a = 0$ alors $f(x_1) = f(x_2) = b$ et f est constante.

Si $a > 0$ alors $ax_1 \leqslant ax_2$ et $ax_1 + b \leqslant ax_2 + b$ donc $f(x_1) \leqslant f(x_2)$ et f est croissante.

Si $a < 0$ alors $ax_1 \geqslant ax_2$ et $ax_1 + b \geqslant ax_2 + b$ donc $f(x_1) \geqslant f(x_2)$ et f est décroissante.

□

Propriété. *Une fonction f est affine si et seulement si l'accroissement de l'image est proportionnel à l'accroissement de la variable :*

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = Constante$$

Démonstration. Si f est une fonction affine avec $f(x) = ax + b$ alors :

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{(ax_2 + b) - (ax_1 + b)}{x_2 - x_1} = \frac{a(x_2 - x_1)}{x_2 - x_1} = a = Constante$$

Supposons que f vérifie $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = Constante = a$ et posons $f(0) = b$, en remplaçant x_2 par x et x_1 par 0, on obtient alors pour $x \neq 0$:

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{f(x) - b}{x} = a$$

$$f(x) - b = ax$$

$$f(x) = ax + b$$

□