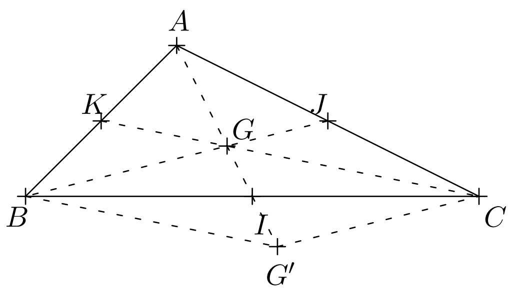
Vecteurs et Centre de Gravité (première partie)

Problème 1

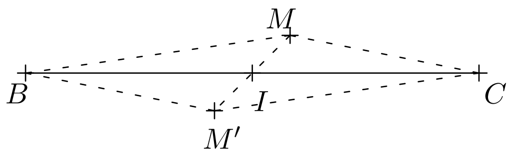
1. La figure est la suivante :



2. Le point I est le milieu du segment $[BC]$ et le point I est le milieu du segment $[GG']$ car G' est le symétrique de G par rapport à I. Les diagonales du quadrilatère $BGCG'$ se coupent en leurs milieux et c'est donc un parallélogramme. D'après la règle du parallélogramme : $\overrightarrow{GG'} = \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}$.
3. G est le centre de gravité du triangle ABC donc $GA = 2GI$, on en déduit donc que $\overrightarrow{GA} = -2\overrightarrow{GI}$. De plus I est le milieu du segment $[GG']$ donc $\overrightarrow{GG'} = 2\overrightarrow{GI}$. On a donc montré que $\overrightarrow{GA} = -\overrightarrow{GG'}$.
4. En utilisant les résultats des deux questions précédentes soit $\overrightarrow{GA} = -\overrightarrow{GG'}$ et $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{GG'}$, on obtient :
$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = -\overrightarrow{GG'} + \overrightarrow{GG'} = \overrightarrow{0}$$

Problème 2

1. La figure est la suivante :



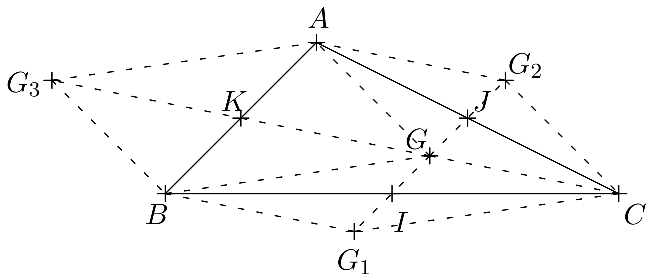
2. On montre de la même façon que dans le problème 1 que le quadrilatère $BMCM'$ est un parallélogramme, on en déduit que $\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MM'} = 2\overrightarrow{MI}$.
3. En utilisant la question précédente :

$$2\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = 2\overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{GI} = 2(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GI})$$

Le point G cherché vérifie donc $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GI} = \overrightarrow{0}$, c'est le milieu du segment $[AI]$.

Problème 3

Soient I,J,K les milieux des côtés d'un triangle ABC, on considère les symétriques G_1,G_2,G_3 du point G par rapport à ces points :



On démontre de la même façon que dans les problèmes précédents que $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} = 2\overrightarrow{GK}$ et $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = 2\overrightarrow{GI}$ d'où :

$$\overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{GB} + 3\overrightarrow{GC} = 2\overrightarrow{GK} + 2\overrightarrow{GI} + 2\overrightarrow{GC}$$

On cherche donc le point G qui vérifie :

$$\overrightarrow{GK} + \overrightarrow{GI} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0}$$

C'est le centre de gravité du triangle KIC.