Devoir maison de mathématiques n°5

Exercice 1

Soit ABC un triangle quelconque.

1. Construire le point G tel que $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$. (laisser les traits de construction)
2. Construire le point D tel que $\overrightarrow{GD} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$. (laisser les traits de construction)
3. En utilisant la relation de Chasles, prouver que $\overrightarrow{AD} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$.

Exercice 2

Dans un repère quelconque $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, on considère les points $A(3; 2)$, $B(-2; 1)$ et $C(2; -1)$.

1. Calculer les coordonnées du point D tel que $ABCD$ soit un parallélogramme.
2. Calculer les coordonnées du point E tel que $\overrightarrow{AE} = \frac{3}{4}\overrightarrow{CB}$.
3. Calculer les coordonnées du point F tel que $2\overrightarrow{FA} + \overrightarrow{FB} + \overrightarrow{FC} = \overrightarrow{0}$.

Exercice 3

Dans un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, on considère les points $A(3; 1)$, $B(3; 2)$, $C(1; 3)$ et $D(-1; -1)$.

1. Montrer que le triangle ACD est isocèle en D.
2. Montrer que le triangle BCD est rectangle en C.
3. Calculer une valeur approchée à l'unité de l'angle $\widehat{BDC}$.

Exercice 4

On considère un triangle quelconque ABC, soit I le milieu du segment $[AB]$.

1. Placer les points M et N tels que $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CA}$.
2. Donner les coordonnées des points A, B, C, M, N et I dans le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.
3. Donner les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{IC}$ dans le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$. En déduire leur colinéarité.
4. Prouver que les droites (MN) et (IC) sont parallèles.

Exercice 5*

On considère un triangle quelconque ABC. On définit les points M, N et P par :

$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}\ ,\quad \overrightarrow{BN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}\ ,\quad \overrightarrow{CP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CA}$$

Soient I et J les milieux respectifs des segments $[BC]$ et $[NP]$.

1. Donner les coordonnées des points M, N et P dans le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.
2. Donner les coordonnées des points I et J dans le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.
3. En déduire les coordonnées des centres de gravité des triangles ABC et MNP. Que constate-t-on ?

Exercice 6**

On considère un triangle quelconque ABC.

1. Placer les points $M(\frac{1}{3}; 0)$ et $N(0; \frac{2}{3})$ dans le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.
2. Construire le point d'intersection P des droites (BN) et (CM).
3. On pose $\overrightarrow{BP} = k_1\overrightarrow{BN}$, exprimer les coordonnées du point P dans le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ en fonction de k_1.
4. On pose $\overrightarrow{CP} = k_2\overrightarrow{CM}$, exprimer les coordonnées du point P dans le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ en fonction de k_2.
5. Calculer k_1 et k_2. (on pourra utiliser un système de deux équations du premier degré)
6. En déduire les coordonnées du point P dans le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.

Exercice 7**

On considère un triangle quelconque ABC. On définit les points M, N et P par :

$$\overrightarrow{AM} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}\ ,\quad \overrightarrow{BN} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}\ ,\quad \overrightarrow{CP} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{CA}$$

Prouver que les triangles ABC et MNP ont même centre de gravité.