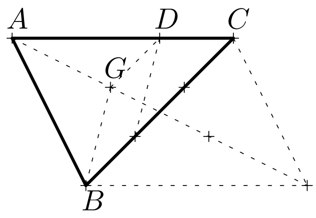
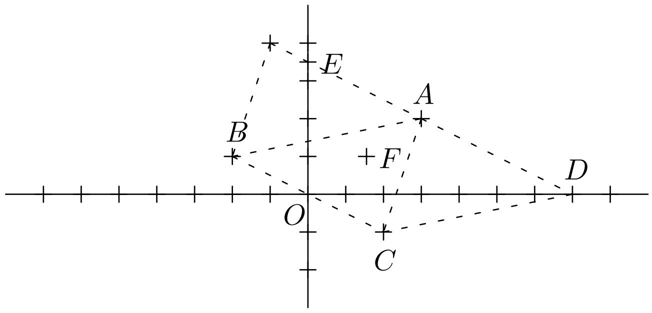
Correction du Devoir maison de mathématiques n°5

Exercice 1



$$\begin{array}{rcl}
\overrightarrow{AD} & = & \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GD} \\
\overrightarrow{AD} & = & \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC} \\
\overrightarrow{AD} & = & \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AC}) \\
\overrightarrow{AD} & = & \frac{1}{3}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC}) \\
\overrightarrow{AD} & = & \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}
\end{array}$$

Exercice 2



1. On pose $D(x;y)$:

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -5 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{DC}\begin{pmatrix} 2-x \\ -1-y \end{pmatrix}$$

   $ABCD$ est un parallélogramme donc $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$:

$$\begin{cases} -5 & = & 2-x \\ -1 & = & -1-y \end{cases}$$

   En résolvant ce système, on obtient $D(7;0)$.

2. On pose $E(x;y)$:

$$\overrightarrow{AE}\begin{pmatrix} x-3 \\ y-2 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{CB}\begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

   $\overrightarrow{AE} = \frac{3}{4}\overrightarrow{CB}$ donc :

$$\begin{cases} x-3 & = & -3 \\ y-2 & = & \frac{3}{2} \end{cases}$$

   En résolvant ce système, on obtient $E(0;\frac{7}{2})$.

3. On pose $F(x;y)$:

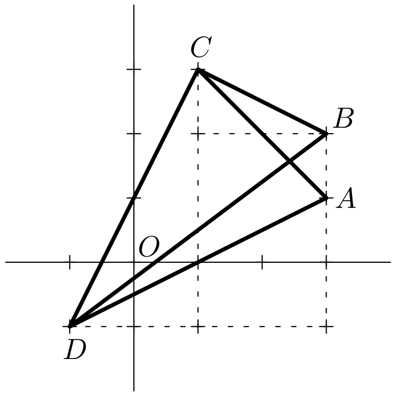
$$\overrightarrow{FA}\begin{pmatrix} x-3 \\ y-2 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{FB}\begin{pmatrix} x+2 \\ y-1 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{FC}\begin{pmatrix} x-2 \\ y+1 \end{pmatrix}$$

$2\overrightarrow{FA}+\overrightarrow{FB}+\overrightarrow{FC}=\overrightarrow{0}$ donc :

$$\begin{cases} 2(x-3)+(x+2)+(x-2) & = & 4x-6 & = & 0 \\ 2(y-2)+(y-1)+(y+1) & = & 4y-4 & = & 0 \end{cases}$$

En résolvant ce système, on obtient $F(\frac{3}{2};1)$.

Exercice 3



1. D'après le théorème de Pythagore :

$$\begin{array}{rcccccc} CD^2 & = & (x_D-x_C)^2+(y_D-y_C)^2 & = & 2^2+4^2 & = & 20 \\ AD^2 & = & (x_D-x_A)^2+(y_D-y_A)^2 & = & 4^2+2^2 & = & 20 \end{array}$$

$CD = AD$ donc le triangle ACD est isocèle en D.

2. D'après le théorème de Pythagore :

$$\begin{array}{rcccccc} BD^2 & = & (x_D-x_B)^2+(y_D-y_B)^2 & = & 4^2+3^2 & = & 25 \\ BC^2 & = & (x_C-x_B)^2+(y_C-y_B)^2 & = & 2^2+1^2 & = & 5 \end{array}$$

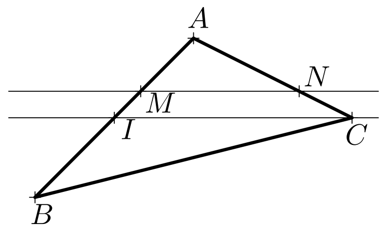
On constate que $BD^2 = CD^2+BC^2$ donc d'après la réciproque du théorème de Pythagore le triangle BCD est rectangle en C.

3. Dans le triangle BCD rectangle en C :

$$\cos(\widehat{BDC}) = \frac{CD}{BD} = \frac{\sqrt{20}}{\sqrt{25}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

La calculatrice indique $\widehat{BDC} \simeq 27°$.

Exercice 4

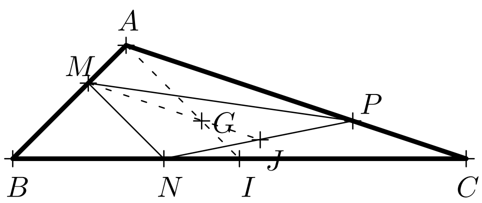


2. Dans le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$: $A(0;0)$, $B(1;0)$, $C(0;1)$, $M(\frac{1}{3};0)$, $N(0;\frac{2}{3})$ et $I(\frac{1}{2};0)$.
3. Dans le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$:

$$\overrightarrow{MN}\begin{pmatrix} 0-\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3}-0 \end{pmatrix} \text{ soit } \overrightarrow{MN}\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{IC}\begin{pmatrix} 0-\frac{1}{2} \\ 1-0 \end{pmatrix} \text{ soit } \overrightarrow{IC}\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

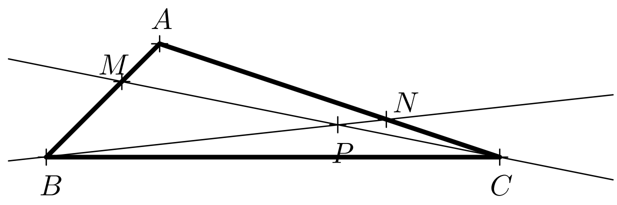
Ces vecteurs sont colinéaires : $\overrightarrow{MN} = \frac{2}{3}\overrightarrow{IC}$.
4. Les droites (MN) et (IC) sont donc parallèles.

Exercice 5*



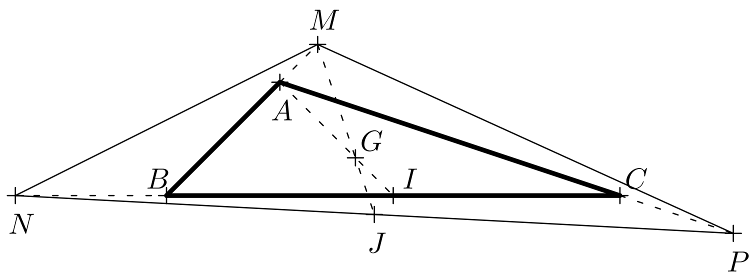
1. Dans le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$, en utilisant les relations vectorielles qui définissent les points M, N et P, on obtient $M(\frac{1}{3};0)$, $N(\frac{2}{3};\frac{1}{3})$ et $P(0;\frac{2}{3})$.
2. Dans le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$, en utilisant la formule de la moyenne permettant de calculer les coordonnées des milieux, on obtient $I(\frac{1}{2};\frac{1}{2})$ et $J(\frac{1}{3};\frac{1}{2})$.
3. Le centre de gravité G_1 du triangle ABC est donné par la formule $\overrightarrow{AG_1} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AI}$. On obtient $G_1(\frac{1}{3};\frac{1}{3})$.
   Le centre de gravité G_2 du triangle MNP est donné par la formule $\overrightarrow{MG_2} = \frac{2}{3}\overrightarrow{MJ}$. On obtient $G_2(\frac{1}{3};\frac{1}{3})$.
   Les triangles ABC et MNP ont donc même centre de gravité.

Exercice 6**



3. Dans le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$, en posant $\overrightarrow{BP} = k_1\overrightarrow{BN}$, on obtient $P(1-k_1; \frac{2}{3}k_1)$.
4. Dans le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$, en posant $\overrightarrow{CP} = k_2\overrightarrow{CM}$, on obtient $P(\frac{1}{3}k_2; 1-k_2)$.
5. On en déduit que :
$$\left\{\begin{array}{rcl} 1-k_1 & = & \frac{1}{3}k_2 \\ \frac{2}{3}k_1 & = & 1-k_2 \end{array}\right.$$
D'où $k_1 = \frac{6}{7}$ et $k_2 = \frac{3}{7}$.
6. Dans le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$, en remplaçant k_1, on obtient $P(\frac{1}{7}; \frac{4}{7})$.

Exercice 7**



On se place dans le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$, on obtient :

$$M(-\frac{1}{3}; 0) \quad N(\frac{4}{3}; -\frac{1}{3}) \quad P(0; \frac{4}{3})$$

Soient I et J les milieux respectifs des segments $[BC]$ et $[NP]$, on obtient :

$$I(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}) \quad J(\frac{2}{3}; \frac{1}{2})$$

Le centre de gravité G_1 du triangle ABC est donné par la formule $\overrightarrow{AG_1} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AI}$ et le centre de gravité G_2 du triangle MNP est donné par la formule $\overrightarrow{MG_2} = \frac{2}{3}\overrightarrow{MJ}$, on obtient :

$$G_1(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}) \quad G_2(\frac{1}{3}; \frac{1}{3})$$

Les triangles ABC et MNP ont donc même centre de gravité.