Droites et Systèmes

1 Équation d'une droite

Propriété. *Pour toute droite du plan muni d'un repère* $(O, \vec{i}, \vec{j})$*, il existe une équation appelée* équation réduite *vérifiée par les coordonnées* $(x; y)$ *de ses points. Elle est de la forme* $y = ax + b$ *ou* $x = c$*.*

Démonstration. On considère une droite (AB) avec $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$. Si $M(x; y)$ appartient à la droite (AB) alors les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AM}$ sont colinéaires :

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x - x_A \\ y - y_A \end{pmatrix}$$

D'où :

$$\begin{aligned} (x_B - x_A)(y - y_A) &= (y_B - y_A)(x - x_A) \\ (x_B - x_A)y &= (y_B - y_A)x + y_A(x_B - x_A) - x_A(y_B - y_A) \end{aligned}$$

- Si $x_A \neq x_B$ alors $y = ax + b$ en posant $a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$ et $b = y_A - x_A\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$.
- Si $x_A = x_B$ alors $0 = (y_B - y_A)x - x_A(y_B - y_A) = (y_B - y_A)(x - x_A)$ or comme $A \neq B$, $y_A \neq y_B$ d'où $x = x_A$ et $x = c$ en posant $c = x_A$.

□

Exemple. *On considère les points* $A(-2; 4)$ *et* $B(3; -1)$ *dans un repère* $(O, \vec{i}, \vec{j})$ *et on cherche l'équation de la droite* (AB) *:*
Soit $M(x; y)$*, les vecteurs suivants sont colinéaires :*

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 5 \\ -5 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x + 2 \\ y - 4 \end{pmatrix}$$

D'où :

$$\begin{aligned} 5(y - 4) &= -5(x + 2) \\ 5y - 20 &= -5x - 10 \\ 5y &= -5x + 10 \\ y &= -x + 2 \end{aligned}$$

Propriété. *Deux droites* $\mathcal{D}_1$ *et* $\mathcal{D}_2$ *d'équations respectives* $y = a_1x + b_1$ *et* $y = a_2x + b_2$ *sont parallèles si et seulement si* $a_1 = a_2$*.*

Démonstration. En remplaçant x par 0 et 1 dans l'équation de la droite $\mathcal{D}_1$, on obtient deux points de la droite : $A(0; b_1)$ et $B(1; a_1 + b_1)$. De même, les points $C(0; b_2)$ et $D(1; a_2 + b_2)$ sont deux points de la droite $\mathcal{D}_2$. Les droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont parallèles si et seulement si les vecteurs suivants sont colinéaires :

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 1 \\ a_1 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{CD}\begin{pmatrix} 1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

Soit $a_1 = a_2$. □

Remarque 1. *On a montré que le vecteur de coordonnées* 1 *et* a *"dirige" la droite d'équation* $y = ax+b$*, on appelle pour cette raison* a *le* coefficient directeur *de la droite. La droite d'équation* $y = ax+b$ *coupe l'axe des ordonnées au point de coordonnées* 0 *et* b*, on appelle pour cette raison* b *l'*ordonnée à l'origine.

Remarque 2. *On a montré dans la démonstration de la première propriété que le coefficient directeur d'une droite* (AB) *est dans le cas où* $x_A \neq x_B$ *:*

$$a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{\textit{accroissement des ordonnées}}{\textit{accroissement des abscisses}}$$

2 Systèmes linéaires d'équations à deux inconnues

Définition. *On appelle système linéaire d'équations à deux inconnues* x *et* y *un système d'équations de la forme :*

$$\begin{cases} a_1x + b_1y & = & c_1 \\ a_2x + b_2y & = & c_2 \end{cases}$$

Résoudre ce système, c'est trouver tous les couples $(x; y)$ *vérifiant les deux équations.*

Interprétation graphique. *Chacune des deux équations du système correspond à l'équation d'une droite, résoudre le système revient à chercher les coordonnées des points d'intersection de ces deux droites.*

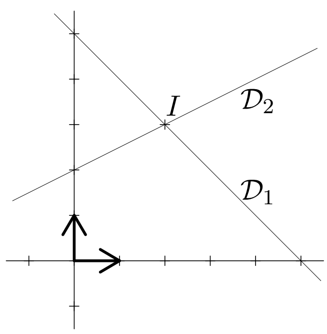
Trois configurations sont possibles :

- *Les deux droites sont sécantes : le système admet une unique solution.*
- *Les deux droites sont parallèles : le système n'admet aucune solution.*
- *Les deux droites sont confondues : le système admet une infinité de solutions.*

Exemple. *Considérons le système suivant :*

$$\begin{cases} x + y & = & 5 & \quad (E_1) \\ 2y - x & = & 4 & \quad (E_2) \end{cases}$$

(E_1) *peut se mettre sous la forme* $y = -x + 5$ *: équation réduite d'une droite* $\mathcal{D}_1$*.*
(E_2) *peut se mettre sous la forme* $y = \frac{x}{2} + 2$ *: équation réduite d'une droite* $\mathcal{D}_2$*.*



$\mathcal{D}_1$ *et* $\mathcal{D}_2$ *sont sécantes en un point* I *de coordonnées* $(2; 3)$ *qui est le couple solution du système.*