# Réponses du devoir libre de Mathématiques n°1

## Exercice 1

Les solutions de l'équation sont 1, $-1+2i$ et $-1-2i$.

## Exercice 2

On remarque que $|(z_1+z_2)+(z_1-z_2)| \leqslant |z_1+z_2|+|z_1-z_2|$ d'où $2|z_1| \leqslant |z_1+z_2|+|z_1-z_2|$ et $2|z_2| \leqslant |z_1+z_2|+|z_1-z_2|$.

## Exercice 3

1. On a $\dfrac{\sin(3x)}{\sin(x)} = 1+2\cos(2x)$ et $\dfrac{\sin(4x)}{\sin(2x)} = 2\cos(2x)$, en remarquant que $\cos\frac{3\pi}{7} = \cos\frac{4\pi}{7}$ on obtient $\dfrac{\sin\frac{3\pi}{7}}{\sin\frac{\pi}{7}} = 1 + \dfrac{\sin\frac{3\pi}{7}}{\sin\frac{2\pi}{7}}$.
2. On a $1+\gamma+\gamma^2+\gamma^3+\gamma^4+\gamma^5+\gamma^6 = \dfrac{1-\gamma^7}{1-\gamma} = 0$ d'où $1+2(\cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{6\pi}{7}) = 0$ et donc $\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{6\pi}{7} = -\frac{1}{2}$.
3. En utilisant les formules d'Euler, on montre que $\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{3\pi}{7} = \frac{1}{4}(1+\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{6\pi}{7}) = \frac{1}{8}$.