

## Réponses du devoir surveillé de Mathématiques n°3

**Exercice 1** (section hexagonale d'un cube)

1.  $\mathcal{P} : x + y + (2\alpha - 1)z = \alpha$ .
2.  $P(0; 1; \frac{1}{2})$ ,  $Q(1 - \alpha; 1; 1)$ ,  $R(1; 1 - \alpha; 1)$  et  $S(1; 0; \frac{1}{2})$ .
3.  $\alpha = \frac{1}{2}$ .
4. Les côtés ont pour longueur  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ .

**Exercice 2** (quelques propriétés du tétraèdre régulier)

1.  $AB = AC = AD = BC = BD = CD = 1$ .
2.  $a = \sqrt{3}$ .
3.  $v = \frac{1}{6} |\text{Det}(\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD})| = \frac{\sqrt{2}}{12}$  et  $h = \sqrt{\frac{2}{3}}$ .
4.  $\Omega(\frac{\sqrt{2}}{4}; \frac{\sqrt{2}}{4}; \frac{\sqrt{2}}{4})$ ,  $d = \sqrt{\frac{3}{2}}$  et  $\alpha = \arccos\left(\frac{\vec{\Omega A} \cdot \vec{\Omega B}}{\|\vec{\Omega A}\| \times \|\vec{\Omega B}\|}\right) = \arccos\left(-\frac{1}{3}\right)$ .
5.  $\vec{n}_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{n}_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$  d'où  $\beta = \arccos\left(\frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{\|\vec{n}_1\| \times \|\vec{n}_2\|}\right) = \arccos\left(\frac{1}{3}\right) = \pi - \alpha$ .

**Exercice 3** (équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients non constants)

1. On remarque que  $f''(t) = 4t^2 f(t) + \frac{1}{t} f'(t)$  et  $g''(t) = 4t^2 g(t) + \frac{1}{t} g'(t)$ .
2.  $(E_1) : y(t) = \lambda t$ ,  $(E_2) : y(t) = -\frac{a}{4} e^{-t^2} + \mu e^{t^2}$ .
3. On montre que  $w'(t) = \frac{1}{t} w(t)$ .
4. On en déduit que  $w(t) = \lambda t$  d'où  $y'(t) - 2ty(t) = \lambda t e^{-t^2}$  (on a donc  $a = \lambda$ ).
5.  $(E) : y(t) = \lambda e^{t^2} + \mu e^{-t^2}$  (en remplaçant  $\frac{\lambda}{4}$  par  $\lambda$ ).

**Exercice 4** (équation fonctionnelle)

1. Si  $a = 0$  on a  $y(t) = \lambda t$ , si  $a > 0$  on a  $y(t) = \lambda \sin(\sqrt{at})$  et si  $a < 0$  on a  $y(t) = \lambda \text{sh}(\sqrt{-at})$ .
2.  $0 \times 0 = 0^2 - 0^2$ ,  $(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$ ,  $\sin(x+y) \sin(x-y) = (\sin x \cos y)^2 - (\sin y \cos x)^2 = (\sin x)^2 [1 - (\sin y)^2] - (\sin y)^2 [1 - (\sin x)^2] = (\sin x)^2 - (\sin y)^2$  et  $\text{sh}(x+y) \text{sh}(x-y) = \frac{(e^{x+y} - e^{-x-y})(e^{x-y} - e^{-x+y})}{2} = \frac{e^{2x} - e^{2y} - e^{-2y} + e^{2x}}{2} = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^y - e^{-y}}{2}\right)^2 = (\text{sh}x)^2 - (\text{sh}y)^2$ .
3. Pour  $x = y = 0$ , on a  $f(0)^2 = 0$ .
4. On dérive par rapport à  $x$  puis par rapport à  $y$  et on obtient  $f''(x+y)f(x-y) - f(x+y)f''(x-y) = 0$ , on pose  $t = x + y$  et  $s = x - y$ .
5. Si  $f$  est nulle c'est évident avec  $a = 0$  sinon il existe  $s$  tel que  $f(s) \neq 0$  et on prend  $a = \frac{f''(s)}{f(s)}$ .
6. Les solutions sont de la forme  $f(t) = \lambda t$ ,  $f(t) = \lambda \sin(\mu t)$  et  $f(t) = \lambda \text{sh}(\mu t)$ .