

VI. Courbes paramétrées - Coniques

1 Fonctions à valeurs vectorielles

On peut définir la dérivation de fonctions à valeurs vectorielles de la même façon que pour les fonctions à valeurs complexes :

Définition 1. On considère une fonction $\vec{f} : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t & \mapsto \vec{f}(t) \end{cases}$ à valeurs vectorielles et on appelle x et y les fonctions à valeurs réelles qui à t associent les coordonnées de $\vec{f}(t)$ soit $\vec{f}(t) \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$. Si les fonctions x et y sont dérivables alors on dit que la fonction à valeurs vectorielles \vec{f} est dérivable et on définit sa dérivée par $\vec{f}'(t) \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}$.

Exercice 1. Montrer que la fonction à valeurs vectorielles $\vec{f} : t \mapsto \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$ est dérivable et calculer sa dérivée.

Définition 2. On considère deux fonctions à valeurs vectorielles $\vec{f}, \vec{g} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, on peut définir les fonctions à valeurs réelles :

$$\begin{aligned} \vec{f} \cdot \vec{g} &: t \mapsto \vec{f}(t) \cdot \vec{g}(t) \\ \text{Det}(\vec{f}, \vec{g}) &: t \mapsto \text{Det}(\vec{f}(t), \vec{g}(t)) \\ \|\vec{f}\| &: t \mapsto \|\vec{f}(t)\| \end{aligned}$$

Exercice 2. On considère la fonction à valeurs vectorielles $\vec{f} : t \mapsto \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$, déterminer $\vec{f} \cdot \vec{f}'$, $\text{Det}(\vec{f}, \vec{f}')$, $\|\vec{f}\|$ et $\|\vec{f}'\|$.

Propriété 1. Dérivée du produit scalaire et du déterminant

On considère deux fonctions à valeurs vectorielles $\vec{f}, \vec{g} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ dérivables, alors les fonctions $\vec{f} \cdot \vec{g}$ et $\text{Det}(\vec{f}, \vec{g})$ sont dérivables et :

$$\boxed{(\vec{f} \cdot \vec{g})' = \vec{f}' \cdot \vec{g} + \vec{f} \cdot \vec{g}'} \quad \boxed{(\text{Det}(\vec{f}, \vec{g}))' = \text{Det}(\vec{f}', \vec{g}) + \text{Det}(\vec{f}, \vec{g}')}$$

Démonstration. Exigible - On se place en base orthonormale. □

Propriété 2. Dérivée de la norme

On considère une fonction à valeurs vectorielles $\vec{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ dérivable et ne s'annulant pas, alors la fonction $\|\vec{f}\|$ est dérivable et :

$$\boxed{\|\vec{f}\|' = \frac{\vec{f}' \cdot \vec{f}}{\|\vec{f}\|}}$$

Démonstration. Exigible - On remarque que $\|\vec{f}\| = \sqrt{\vec{f} \cdot \vec{f}}$. □

Exercice 3. On considère une fonction à valeurs vectorielles \vec{f} dérivable telle que $\|\vec{f}\| = \text{Cte}$, montrer que $\vec{f}' \cdot \vec{f} = 0$.

2 Courbes planes paramétrées

Définition 3. Dans le plan muni d'un repère orthonormal, on appelle **courbe paramétrée** ou **arc paramétré** l'ensemble des points $M(t)$ de coordonnées $(x(t); y(t))$ pour $t \in I$ avec x et y deux fonctions à valeurs dans \mathbb{R} définies sur un intervalle I .

Exercice 4. Représenter graphiquement la courbe paramétrée : $\begin{cases} x(t) = \cos t - 1 \\ y(t) = \sin t \end{cases}, t \in [\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}]$.
(on choisira une unité graphique adaptée)

L'étude d'une courbe plane paramétrée se décompose en plusieurs étapes :

2.1 Réduction de l'intervalle d'étude d'une courbe plane paramétrée

On commence si possible par réduire l'intervalle d'étude en détectant une périodicité ou des symétries éventuelles.

Exercice 5. On considère la courbe paramétrée $\mathcal{C} : \begin{cases} x(t) = (\cos t)^3 \\ y(t) = (\sin t)^3 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$.

Montrer en étudiant $M(t+2\pi)$, $M(t+\pi)$, $M(-t)$ et $M(\frac{\pi}{2}-t)$ que l'on peut réduire l'étude à l'intervalle $[0; \frac{\pi}{4}]$, en déduire la représentation graphique de la courbe \mathcal{C} . (on choisira une unité graphique adaptée)

2.2 Étude des variations d'une courbe plane paramétrée

On étudie ensuite conjointement les variations des fonctions x et y en fonction de t .

Exercice 6. On considère la courbe paramétrée $\mathcal{C} : \begin{cases} x(t) = \frac{2t}{t^2 + 1} \\ y(t) = \frac{3t}{t^2 + 4} \end{cases}, t \in \mathbb{R}$.

Dresser dans un même tableau les variations des fonctions x et y en fonction de t , en déduire l'allure de la représentation graphique de la courbe \mathcal{C} , l'orienter dans le sens des t croissants.

2.3 Branches infinies d'une courbe plane paramétrée

Définition 4. On appelle **vecteur position** d'une courbe plane paramétrée $M(t)$, $t \in I$ la fonction à valeurs vectorielles $\vec{f} : t \mapsto \overrightarrow{OM(t)}$.

Définition 5. Une courbe plane paramétrée admet une **branche infinie** en t_0 (respectivement en $+\infty$ ou en $-\infty$) si la norme de son vecteur position tend vers $+\infty$ en t_0 (respectivement en $+\infty$ ou en $-\infty$).

Remarque 1. Les asymptotes sont des cas particuliers de branches infinies.

Exercice 7. Étudier les branches infinies de la courbe paramétrée : $\begin{cases} x(t) = \frac{1}{t} \\ y(t) = e^t \end{cases}, t \in \mathbb{R}^*$.

2.4 Tangente d'une courbe plane paramétrée

Définition 6. On considère une courbe plane paramétrée $M(t)$, $t \in I$ telle que son vecteur position \vec{f} soit dérivable sur I , on appelle **vecteur vitesse** de la courbe plane paramétrée $\vec{v} = \vec{f}'$.

Définition 7. Un point d'une courbe plane paramétrée ou le vecteur vitesse ne s'annule pas est appelé **point régulier**, un point où le vecteur vitesse s'annule est appelé **point singulier** ou **point stationnaire**.

Exercice 8. Déterminer les points stationnaires de la courbe paramétrée : $\begin{cases} x(t) = t^3 - 3t + 1 \\ y(t) = t^4 - 2t^2 + 1 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$.

Propriété 3. On considère une courbe plane paramétrée $M(t)$, $t \in I$ telle que son vecteur position \vec{f} soit dérivable sur I , alors elle admet une tangente en tout point régulier dirigée par le vecteur vitesse en ce point.

Démonstration. Exigible - On étudie la limite du vecteur $\vec{\Delta}(t_0; t) = \frac{1}{t - t_0} \overrightarrow{M(t_0)M(t)}$ pour $t \rightarrow t_0$. □

Exercice 9. On considère la courbe paramétrée : $\begin{cases} x(t) = (t - 1)^2 \\ y(t) = (t + 1)^2 \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$. Montrer qu'elle admet une tangente aux points de paramètres $t = -1$, $t = 0$ et $t = 1$ et en déterminer une équation cartésienne.

Remarque 2. Dans le cas d'un point stationnaire, on a $\lim_{t \rightarrow t_0} |z_{\vec{\Delta}(t_0;t)}| = 0$, on étudie donc la limite de $\arg(z_{\vec{\Delta}(t_0;t)})$ pour $t \rightarrow t_0$.

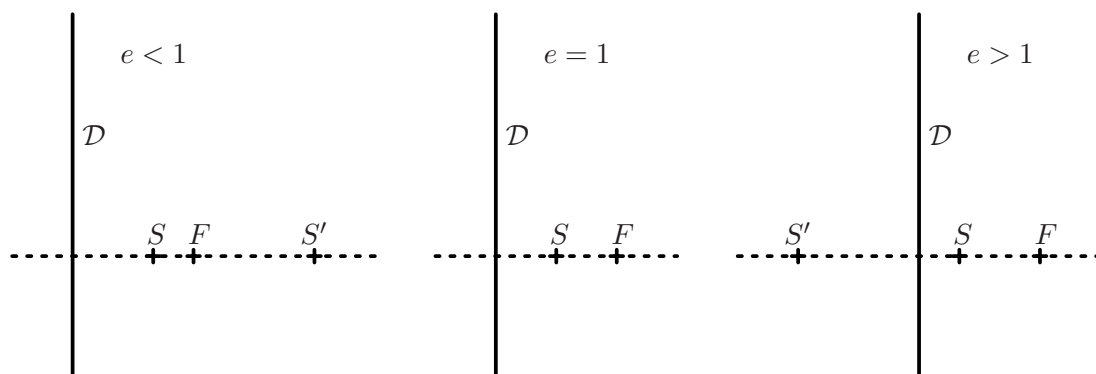
Exercice 10. On considère la courbe paramétrée : $\begin{cases} x(t) = t^3 + 1 \\ y(t) = t^2 - 1 \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$. Montrer qu'elle admet une tangente au point de paramètre $t = 0$ et en déterminer une équation cartésienne.

3 Coniques

Définition 8. On considère un point F et une droite \mathcal{D} ne contenant pas F ainsi qu'un nombre réel $e > 0$, on appelle **conique de foyer** F , de **directrice** \mathcal{D} et d'**excentricité** e l'ensemble des points M du plan tels que $\boxed{d(M, F) = e \times d(M, \mathcal{D})}$.

Remarque 3. En appelant H le projeté orthogonal du point M sur la droite \mathcal{D} , la définition est équivalente à $\frac{MF}{MH} = e$ car M ne peut pas appartenir à la droite \mathcal{D} .

Définition 9. On considère une conique de foyer F et de directrice \mathcal{D} , on appelle **axe focal** la droite passant par F et perpendiculaire à \mathcal{D} et **sommet** un point de la conique appartenant à l'axe focal.



Définition 10. On appelle **ellipse** une conique d'excentricité $0 < e < 1$, **parabole** une conique d'excentricité $e = 1$ et **hyperbole** une conique d'excentricité $e > 1$.

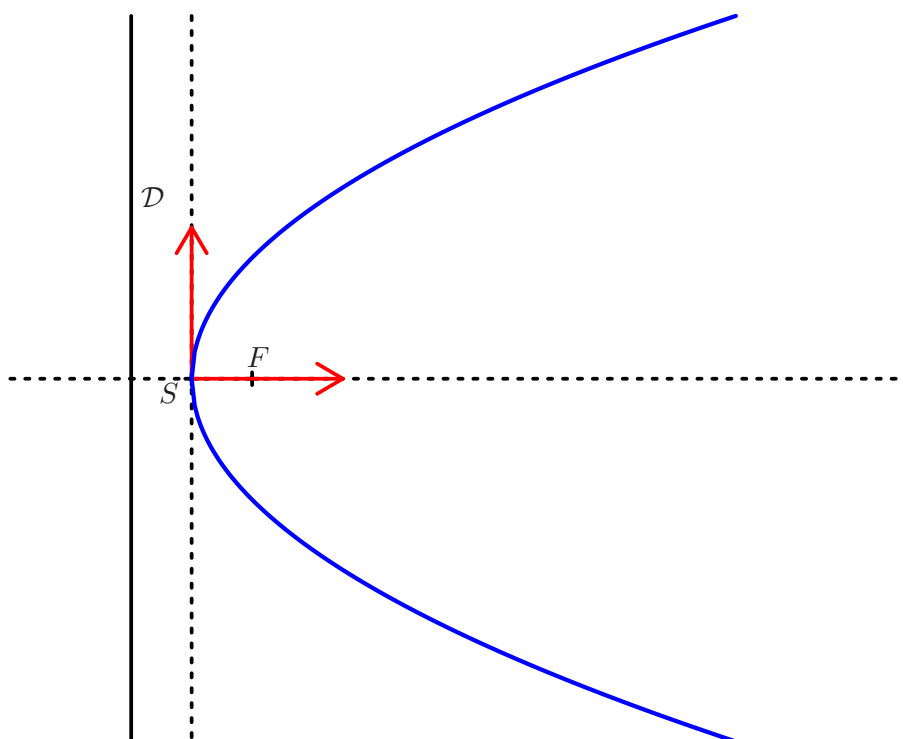
Exercice 11. Montrer qu'une parabole possède un unique sommet et qu'une ellipse ou une hyperbole exactement deux sommets.

3.1 Parabole

Propriété 4. Équation réduite de la parabole

On considère une parabole de foyer F , de directrice \mathcal{D} et de sommet S . Dans un repère orthonormal d'origine S dont l'axe des abscisses est l'axe focal orienté par le vecteur \overrightarrow{SF} , la parabole admet pour équation cartésienne $y^2 = 2px$ avec $p \in \mathbb{R}_+^*$, p est appelé **paramètre** de la parabole, on a alors $F\left(\frac{p}{2}; 0\right)$ et

$$\mathcal{D} : x = -\frac{p}{2}.$$



Démonstration. Exigible - On note p la distance du foyer à la directrice. □

Exercice 12. Le plan étant muni d'un repère orthonormal, montrer que la courbe d'équation cartésienne $y = x^2$ est une parabole et déterminer son sommet, son foyer et sa directrice.

Propriété 5. Tangentes de la parabole

Une parabole \mathcal{P} d'équation réduite $y^2 = 2px$ admet au point $M_0(x_0; y_0) \in \mathcal{P}$ une tangente \mathcal{T} dont une équation cartésienne est $y_0y = p(x_0 + x)$.

Démonstration. Exigible - On se place dans le demi-plan $y \geq 0$ en posant $f(x) = \sqrt{2px}$ puis on procède par symétrie. □

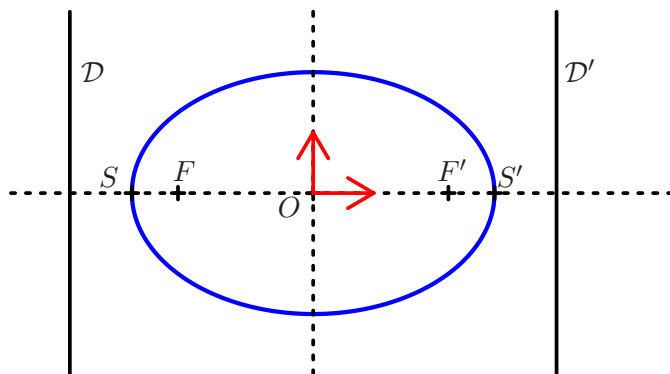
Exercice 13. On considère une parabole \mathcal{P} d'équation réduite $y^2 = 2px$, déterminer les coordonnées du point d'intersection de la tangente en $M_0(x_0; y_0) \in \mathcal{P}$ avec l'axe de \mathcal{P} , en déduire une construction géométrique des tangentes de la parabole.

3.2 Ellipse

Propriété 6. Équation réduite de l'ellipse

On considère une ellipse de foyer F , de directrice \mathcal{D} , d'excentricité e et de sommets S et S' . Dans un repère orthonormal d'origine le milieu du segment $[SS']$ dont l'axe des abscisses est l'axe focal, l'ellipse admet

pour équation cartésienne $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ avec $a, b \in \mathbb{R}_+$ et $a > b$, a est appelé **demi-grand axe** de l'ellipse, b est appelé **demi-petit axe** de l'ellipse, on a alors $S(-a; 0)$, $S'(a; 0)$, $\mathcal{D} : x = -\frac{a}{e}$, $\mathcal{D}' : x = \frac{a}{e}$ et $F(-c; 0)$, $F'(c; 0)$ avec $c = ae$ et $b^2 = a^2 - c^2$.



Démonstration. Exigible - On note $a = \frac{SS'}{2}$ et on remarque qu'alors $\mathcal{D} : x = -\frac{a}{e}$ puis $F(-ae; 0)$. □

Exercice 14. Le plan étant muni d'un repère orthonormal, montrer que la courbe d'équation cartésienne $25x^2 + 16y^2 - 400 = 0$ est une ellipse et déterminer ses sommets, foyers et directrices ainsi que son excentricité.

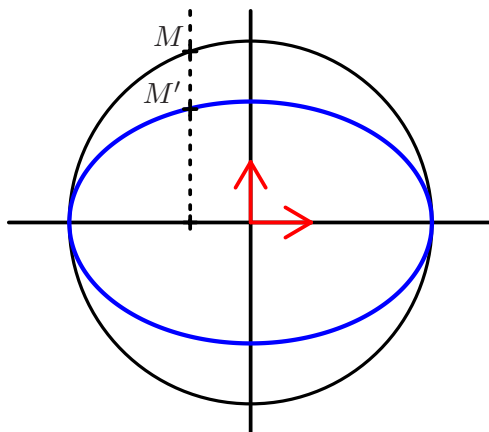
Propriété 7. Paramétrage de l'ellipse

Une ellipse d'équation réduite $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ admet pour paramétrage $\begin{cases} x = a \cos t \\ y = b \sin t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$.

Démonstration. Exigible. □

Propriété 8. Image d'un cercle par une affinité orthogonale

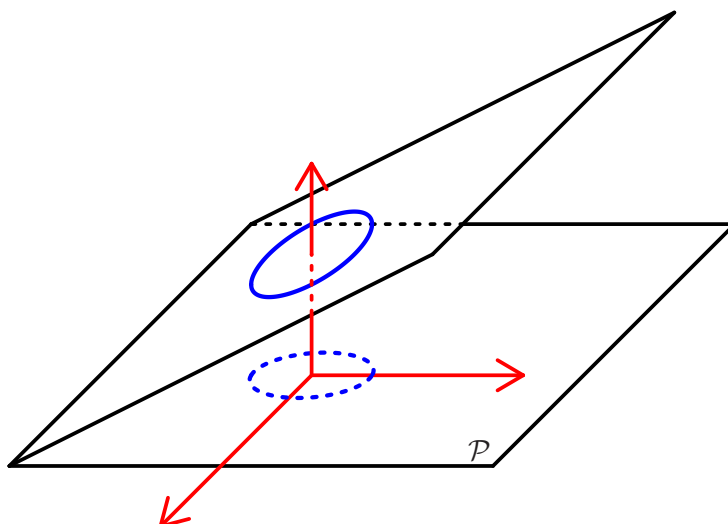
L'image d'un cercle d'équation réduite $x^2 + y^2 = R^2$, $R \in \mathbb{R}_+$ par l'affinité orthogonale $\begin{cases} x' = x \\ y' = ky \end{cases}$, $0 < k < 1$ est une ellipse d'équation réduite $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ avec $a = R$ et $b = kR$.



Démonstration. Exigible. □

Propriété 9. Projection orthogonale d'un cercle de l'espace sur un plan

La projection d'un cercle de l'espace sur un plan \mathcal{P} non parallèle ou orthogonal au plan du cercle est une ellipse.



Démonstration. Exigible - On choisit le repère afin que le plan \mathcal{P} admette pour équation cartésienne $z = 0$, que le plan du cercle admette un vecteur normal de la forme $\vec{n} \begin{pmatrix} 0 \\ \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix}$ et que le projeté orthogonal du centre du cercle sur le plan \mathcal{P} soit l'origine du repère. □

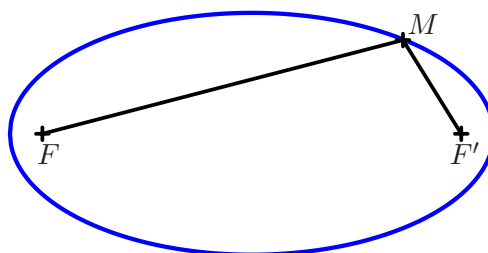
Propriété 10. Tangentes de l'ellipse

Une ellipse \mathcal{E} d'équation réduite $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ admet au point $M_0(x_0; y_0) \in \mathcal{E}$ une tangente \mathcal{T} dont une équation cartésienne est $\boxed{\frac{x_0x}{a^2} + \frac{y_0y}{b^2} = 1}$.

Démonstration. Exigible - On se place dans le premier quadrant en posant $f(x) = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$, $x \in [0; a]$ puis on procède par symétries. □

Propriété 11. Définition bifocale de l'ellipse

Le point M appartient à l'ellipse de foyers F et F' et de demi-grand axe a si et seulement si $\boxed{MF + MF' = 2a}$.

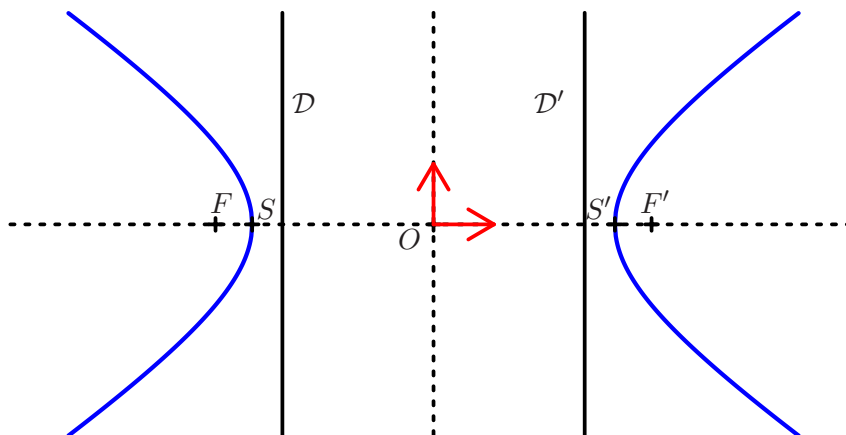


Démonstration. Hors programme - On utilise la définition par foyer et directrice. □

3.3 Hyperbole

Propriété 12. Équation réduite de l'hyperbole

On considère une hyperbole de foyer F , de directrice \mathcal{D} , d'excentricité e et de sommets S et S' . Dans un repère orthonormal d'origine le milieu du segment $[SS']$ dont l'axe des abscisses est l'axe focal, l'hyperbole admet pour équation cartésienne $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ avec $a, b \in \mathbb{R}_+^*$, a est appelé **demi-axe** de l'hyperbole, on a alors $S(-a; 0)$, $S'(a; 0)$, $\mathcal{D} : x = -\frac{a}{e}$, $\mathcal{D}' : x = \frac{a}{e}$ et $F(-c; 0)$, $F'(c; 0)$ avec $c = ae$ et $b^2 = c^2 - a^2$.



Démonstration. Exigible - On note $a = \frac{SS'}{2}$ et on remarque qu'alors $\mathcal{D} : x = -\frac{a}{e}$ puis $F(-ae; 0)$. □

Exercice 15. Le plan étant muni d'un repère orthonormal, montrer que la courbe d'équation cartésienne $9x^2 - 16y^2 + 18x + 32y - 6 = 0$ est une hyperbole et déterminer ses sommets, foyers et directrices ainsi que son excentricité.

Propriété 13. Asymptotes de l'hyperbole

Une hyperbole \mathcal{H} d'équation réduite $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ admet deux asymptotes obliques d'équations $y = \frac{b}{a}x$ et $y = -\frac{b}{a}x$.

Démonstration. Exigible. □

Exercice 16. Le plan étant muni d'un repère orthonormal, déterminer les asymptotes de la courbe d'équation cartésienne $2x^2 - 3y^2 + 1 = 0$.

Propriété 14. Tangentes de l'hyperbole

Une hyperbole \mathcal{H} d'équation réduite $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ admet au point $M_0(x_0; y_0) \in \mathcal{H}$ une tangente \mathcal{T} dont une équation cartésienne est $\frac{x_0x}{a^2} - \frac{y_0y}{b^2} = 1$.

Démonstration. Exigible - On se place dans le premier quadrant en posant $f(x) = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$, $x \in [a; +\infty[$ puis on procède par symétries. □

Propriété 15. Définition bifocale de l'hyperbole

Le point M appartient à l'hyperbole de foyers F et F' et de demi-axe a si et seulement si $|MF - MF'| = 2a$.

Démonstration. Hors programme - On utilise la définition par foyer et directrice. □