VIII. Suites

1 Corps $\mathbb{R}$ des nombres réels

Définition 1. *Étant donnés $x, y \in \mathbb{R}$ on dit que :*
- *x est inférieur ou égal à y ($x \leqslant y$) ou y est supérieur ou égal à x ($y \geqslant x$) si $y - x$ est un réel positif ou nul.*
- *x est inférieur strictement à y ($x < y$) ou y est supérieur strictement à x ($y > x$) si $y - x$ est un réel strictement positif.*

Propriété 1. *Les relations d'ordre $\leqslant$ et $\geqslant$ sur $\mathbb{R}$ vérifient les propriétés suivantes :*
- **Transitivité**
  pour tous $x, y, z \in \mathbb{R}$, si $x \leqslant y$ et $y \leqslant z$ alors $x \leqslant z$ (resp. si $x \geqslant y$ et $y \geqslant z$ alors $x \geqslant z$)
- **Compatibilité avec l'addition**
  pour tous $x, y, z \in \mathbb{R}$, si $x \leqslant y$ alors $x + z \leqslant y + z$ (resp. si $x \geqslant y$ alors $x + z \geqslant y + z$)
- **Compatibilité avec la multiplication**
  pour tous $x, y \in \mathbb{R}$ et $z \in \mathbb{R}_+$, si $x \leqslant y$ alors $x \times z \leqslant y \times z$ (resp. si $x \geqslant y$ alors $x \times z \geqslant y \times z$)
  pour tous $x, y \in \mathbb{R}$ et $z \in \mathbb{R}_-$, si $x \leqslant y$ alors $x \times z \geqslant y \times z$ (resp. si $x \geqslant y$ alors $x \times z \leqslant y \times z$)

Démonstration. Exigible. □

Remarque 1. *Les relations d'ordre sont également compatibles avec la soustraction (addition de l'opposé) et la division par un nombre non nul (multiplication par l'inverse).*

Exercice 1. *Montrer que pour tous $x_1, y_1, x_2, y_2 \in \mathbb{R}$, si $x_1 \leqslant y_1$ et $x_2 \leqslant y_2$ alors $x_1 + x_2 \leqslant y_1 + y_2$.*

Exercice 2. *A-t-on pour tous $x_1, y_1 \in \mathbb{R}$ et $x_2, y_2 \in \mathbb{R}_+$, si $x_1 \leqslant y_1$ et $x_2 \leqslant y_2$ alors $x_1 \times x_2 \leqslant y_1 \times y_2$?*

Définition 2. Intervalles de $\mathbb{R}$
Étant donnés deux nombres réels a et b on définit :

$$\begin{aligned}
[a, b] &= \{x \in \mathbb{R} \ / \ a \leqslant x \leqslant b\} \\
]a, b[&= \{x \in \mathbb{R} \ / \ a < x < b\} \\
]a, b] &= \{x \in \mathbb{R} \ / \ a < x \leqslant b\} \\
[a, b[&= \{x \in \mathbb{R} \ / \ a \leqslant x < b\} \\
[a, +\infty[&= \{x \in \mathbb{R} \ / \ a \leqslant x\} \\
]a, +\infty[&= \{x \in \mathbb{R} \ / \ a < x\} \\
]-\infty, b] &= \{x \in \mathbb{R} \ / \ x \leqslant b\} \\
]-\infty, b[&= \{x \in \mathbb{R} \ / \ x < b\}
\end{aligned}$$

Définition 3. **Valeur absolue d'un nombre réel**

On appelle **valeur absolue d'un réel** x : $\boxed{|x| = \begin{cases} x & si\ x \geqslant 0 \\ -x & si\ x \leqslant 0 \end{cases}}$.

Remarque 2. *Pour tout réel x on a $|x| = \sqrt{x^2}$ et pour tous réels x et y on a $|xy| = |x| \times |y|$.*

Définition 4. **Distance de deux nombres réels**

On appelle **distance de deux réels** x *et* y : $\boxed{\mathrm{d}(x,y) = |y-x|}$.

Propriété 2. **Inégalités triangulaires**

Pour tous réels x et y, on a $\boxed{||x|-|y|| \leqslant |x+y| \leqslant |x|+|y|}$.

Démonstration. Exigible - On s'intéresse aux carrés. □

Définition 5. *On considère $E \subset \mathbb{R}$, on dit que E est :*
- *majorée s'il existe un nombre réel M appelé* **majorant** *de E tel que pour tout $x \in E$ on a $x \leqslant M$.*
- *minorée s'il existe un nombre réel m appelé* **minorant** *de E tel que pour tout $x \in E$ on a $x \geqslant m$.*
- *bornée si elle est à la fois majorée et minorée.*

Remarque 3. *Si E admet un plus grand élément il est également un majorant de E.*

Contre-exemple 1. *L'ensemble $E = \{x \in \mathbb{Q} \ / \ x^2 \leqslant \sqrt{2}\}$ est majoré mais n'admet pas de plus grand élément.*

Théorème 1. *Toute partie non vide majorée de $\mathbb{R}$ admet un plus petit majorant appelé* **borne supérieure**, *toute partie non vide minorée de $\mathbb{R}$ admet un plus grand minorant appelé* **borne inférieure**.

Démonstration. Hors programme. □

Exercice 3. *On considère les intervalles $I = [-2;3]$, $J =]-2;3[$ et $K =]-2;+\infty[$. Déterminer s'ils existent leurs plus grand élément, plus petit élement, borne supérieure et borne inférieure.*

Remarque 4. *Si on définit la* **droite réelle achevée** $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ *alors toute partie non vide de $\mathbb{R}$ admet une borne inférieure et une borne supérieure.*

Définition 6. *On appelle* **partie entière d'un nombre réel** x *et on note $\mathrm{E}(x)$ le plus grand nombre entier inférieur ou égal à x.*

Remarque 5. $\mathrm{E}(x)$ *est l'unique nombre entier tel que $\mathrm{E}(x) \leqslant x < \mathrm{E}(x)+1$.*

Exercice 4. *Déterminer $\mathrm{E}(\sqrt{2})$ et $\mathrm{E}(-\sqrt{2})$.*

Exercice 5. *Tracer la représentation graphique de la fonction partie entière.*

Exercice 6. *Exprimer $\mathrm{E}(-x)$ en fonction de $\mathrm{E}(x)$.*

2 Suites réelles

Définition 7. *On appelle* **suite de nombres réels** *une application* $u : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{R} \\ n & \mapsto & u(n) = u_n \end{array}$.

Exercice 7. *Calculer les premiers termes de la suite* $\left\{ \begin{array}{rcl} u_0 & = & 0 \\ u_1 & = & 1 \\ u_{n+2} & = & \frac{u_n+u_{n+1}}{2} \ , \ n \in \mathbb{N} \end{array} \right.$ *puis la représenter graphiquement.*

L'ensemble $E = \{u_n \ / \ n \in \mathbb{N}\}$ étant une partie de $\mathbb{R}$, on peut définir la notion de suite majorée, minorée et bornée.

Définition 8. *Une suite réelle* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est dite :*
- **majorée** *s'il existe un nombre réel* M *tel que pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *on a* $u_n \leqslant M$.
- **minorée** *s'il existe un nombre réel* m *tel que pour tout* $x \in \mathbb{N}$ *on a* $u_n \geqslant m$.
- **bornée** *si elle est à la fois majorée et minorée.*

Exercice 8. *Montrer que la suite* $\left\{ \begin{array}{rcl} u_0 & = & 0 \\ u_1 & = & 1 \\ u_{n+2} & = & \frac{u_n+u_{n+1}}{2} \ , \ n \in \mathbb{N} \end{array} \right.$ *est bornée.*

Définition 9. Opérations sur les suites
Étant données deux suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *ainsi qu'un nombre réel* λ, *on note :*
- $(u_n) + (v_n)$ *la suite de terme général* $u_n + v_n$.
- $\lambda(u_n)$ *la suite de terme général* λu_n.
- $(u_n) \times (v_n)$ *la suite de terme général* $u_n \times v_n$.

Remarque 6. *On peut étendre la définition à la différence et au quotient si la suite au dénominateur ne s'annule pas.*

Exercice 9. *Montrer que la somme de deux suites bornées est une suite bornée.*

Définition 10. *Étant données deux suites réelles* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, *on note* $(u_n) \leqslant (v_n)$ *si pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *on a* $u_n \leqslant v_n$.

Exercice 10. *Comparer les suites* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définies par* $u_n = n$ *et* $v_n = \ln(n+1)$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$.

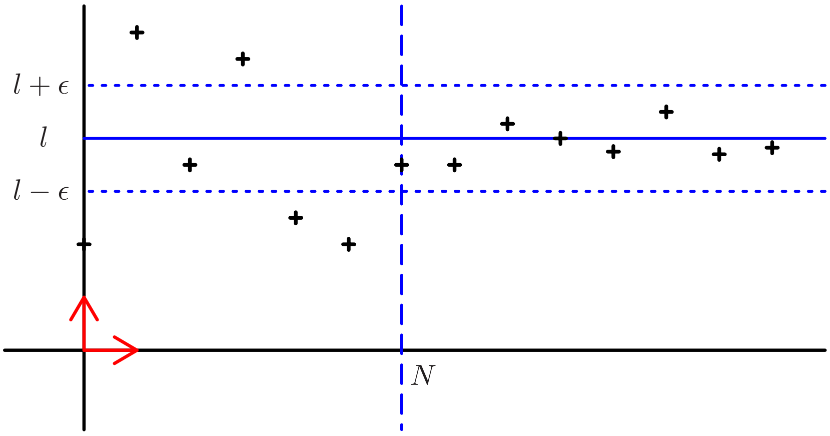
Définition 11. Sens de variation d'une suite
Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est dite :*
- **constante** *si pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *on a* $u_{n+1} = u_n$.
- **croissante** *(strictement croissante) si pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *on a* $u_{n+1} \geqslant u_n$ $(u_{n+1} > u_n)$.
- **décroissante** *(strictement décroissante) si pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *on a* $u_{n+1} \leqslant u_n$ $(u_{n+1} < u_n)$.
- **monotone** *si elle est croissante ou décroissante.*

Exercice 11. *Étudier le sens de variation de la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définie par* $u_n = 3n^2 - 2n + 1$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *en étudiant la différence* $u_{n+1} - u_n$ *puis en étudiant la fonction* $f : x \mapsto 3x^2 - 2x + 1$.

Exercice 12. *Étudier le sens de variation de la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définie par* $u_n = \dfrac{n^2}{4^n}$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *en étudiant le quotient* $\frac{u_{n+1}}{u_n}$.

3 Limite d'une suite

Définition 12. Limite finie
Une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite $l \in \mathbb{R}$ si pour tout réel $\epsilon > 0$ il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N$ on a $|u_n - l| \leqslant \epsilon$, on note $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$.



Remarque 7. *Le rang N dépend du ϵ choisi.*

Remarque 8. *Une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite $l \in \mathbb{R}$ si et seulement si la suite $(u_n - l)_{n\in\mathbb{N}}$ admet 0 pour limite.*

Exercice 13. *Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = \dfrac{n}{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ admet 1 pour limite.*

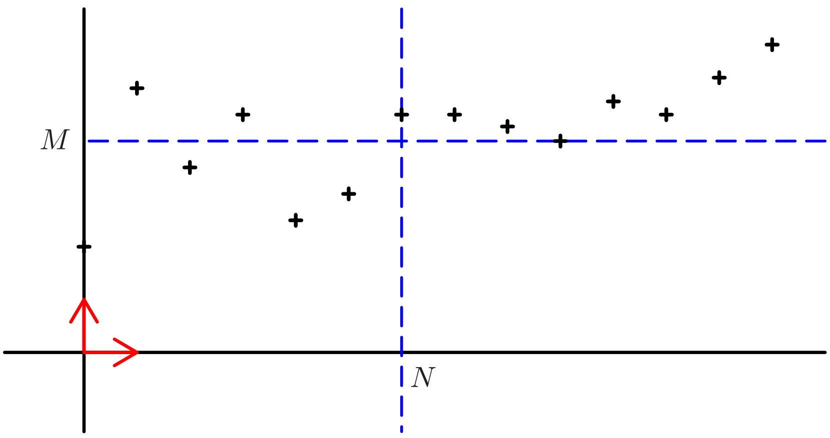
Propriété 3. *Si une suite admet une limite finie celle-ci est nécéssairement unique.*

Démonstration. Exigible - On raisonne par l'absurde en posant $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \frac{|l_2 - l_1|}{3}$ et $N = \max(N_1, N_2)$. $\square$

Définition 13. *Une suite admettant une limite finie est dite* **convergente**, *une suite n'admettant pas de limite finie est dite* **divergente**.

Exercice 14. *Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = (-1)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ est divergente. (on pourra s'intéresser à la quantité $|u_{n+1} - u_n|$)*

Définition 14. Limite infinie
Une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$ si pour tout réel M il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N$ on a $u_n \geqslant M$, on note $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
Une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $-\infty$ si pour tout réel M il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N$ on a $u_n \leqslant M$, on note $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.



Remarque 9. *Une suite réelle* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *diverge vers* $+\infty$ *si et seulement si la suite réelle* $(-u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *diverge vers* $-\infty$.

Exercice 15. *Montrer que la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définie par* $u_n = n^2 + 1$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *diverge vers* $+\infty$.

Propriété 4. *Toute suite réelle convergente est bornée.*

Démonstration. Exigible - On fixe ϵ puis on considère $m = \min(u_0, u_1, u_2, \ldots, u_{N-1}, l - \epsilon)$ et $M = \max(u_0, u_1, u_2, \ldots, u_{N-1}, l + \epsilon)$. □

Contre-exemple 2. *La suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définie par* $u_n = (-1)^n$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *est bornée et n'est pas convergente.*

Exercice 16. *Montrer que toute suite réelle qui converge vers une limite strictement positive est minorée par un nombre strictement positif à partir d'un certain rang.*

Définition 15. *On appelle* **suite extraite** *d'une suite réelle* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, *une suite* $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ *où* φ *est une application strictement croissante de* $\mathbb{N}$ *dans* $\mathbb{N}$.

Exercice 17. *Montrer que la suite des entiers pairs et la suite des entiers impairs sont des suites extraites de la suite des entiers naturels.*

Propriété 5. *Si une suite réelle converge vers une limite finie alors toute suite extraite de celle-ci converge vers la même limite.*

Démonstration. Exigible - On montre d'abord par récurrence que $\varphi(n) \geqslant n$. □

Exercice 18. *Montrer que la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définie par* $u_n = \sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *est divergente.*

Propriété 6. Limites d'une suite arithmétique
On considère une suite arithmétique de raison r, *alors :*
- *si* $r > 0$ *la suite diverge vers* $+\infty$.
- *si* $r < 0$ *la suite diverge vers* $-\infty$.

Démonstration. Exigible - On utilise la forme explicite. □

Propriété 7. Limites d'une suite géométrique
On considère une suite géométrique de raison r, *alors :*
- *si* $|r| < 1$ *la suite converge vers* 0.
- *si* $r > 1$ *et* $u_0 > 0$ *la suite diverge vers* $+\infty$.
- *si* $r > 1$ *et* $u_0 < 0$ *la suite diverge vers* $-\infty$.

Démonstration. Exigible - On utilise la forme explicite. □

Exercice 19. *Une suite géométrique de raison* $r \leqslant -1$ *admet-elle une limite ?*

4 Opérations sur les limites, comparaison des limites

Propriété 8. Limites et opérations
On considère deux suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui convergent respectivement vers les limites finies l_1 et l_2, alors :
- *la suite $(u_n)+(v_n)$ converge vers l_1+l_2.*
- *la suite $(u_n)\times(v_n)$ converge vers $l_1\times l_2$.*

Démonstration. Exigible - On remarque que $|(u_n+v_n)-(l_1+l_2)| \leqslant |u_n-l_1|+|v_n-l_2|$ et que $|u_nv_n-l_1l_2| \leqslant |(u_n-l_1)v_n|+|l_1(v_n-l_2)|$. □

Remarque 10. *On peut étendre la propriété à la différence et au quotient si la suite au dénominateur ne s'annule pas et converge vers une limite non nulle.*

Exercice 20. *On considère une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la relation de récurrence $u_{n+1}=u_n^2-1$ pour tout $n\in\mathbb{N}$. Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, que peut-on dire de sa limite ?*

Propriété 9. *On considère une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers une limite finie l et une suite réelle $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui diverge vers $+\infty$, alors :*
- *la suite $(u_n)+(v_n)$ diverge vers $+\infty$.*
- *la suite $(u_n)\times(v_n)$ diverge vers $+\infty$ si $l>0$ et vers $-\infty$ si $l<0$.*

Démonstration. Exigible. □

Propriété 10. *On considère deux suites rélles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui divergent vers $+\infty$, alors :*
- *la suite $(u_n)+(v_n)$ diverge vers $+\infty$.*
- *la suite $(u_n)\times(v_n)$ diverge vers $+\infty$.*

Démonstration. Exigible. □

Propriété 11. *On considère une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne s'annulant pas qui diverge vers $+\infty$ alors la suite $\left(\dfrac{1}{u_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.*

Démonstration. Exigible. □

Propriété 12. *On considère une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ strictement positive qui converge vers 0 alors la suite $\left(\dfrac{1}{u_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$.*

Démonstration. Exigible. □

Remarque 11. *On peut également énoncer une propriété dans le cas ou la suite est strictement négative.*

Contre-exemple 3. *La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n=\dfrac{(-1)^n}{n+1}$ pour tout $n\in\mathbb{N}$ converge vers 0 mais la suite $\left(\dfrac{1}{u_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ n'admet pas de limite infinie.*

Exercice 21. *Résumer dans des tableaux les propriétés des opérations sur les limites.*

Propriété 13. *On considère deux suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $u_n\leqslant v_n$ pour tout $n\in\mathbb{N}$ qui convergent respectivement vers les limites finies l_1 et l_2, alors $l_1\leqslant l_2$.*

Démonstration. Exigible - On raisonne par l'absurde en posant $\epsilon_1=\epsilon_2=\frac{l_1-l_2}{3}$ et $N=\max(N_1,N_2)$. □

Exercice 22. *Si $u_n<v_n$ pour tout $n\in\mathbb{N}$ a-t-on $l_1<l_2$?*

5 Théorèmes d'existence de limites

Théorème 2. Théorème d'encadrement
On considère trois suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$, alors :

- *si $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers l alors la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l.*
- *si $u_n \leqslant v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$ alors la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$.*
- *si $u_n \leqslant v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $-\infty$ alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $-\infty$.*

Démonstration. Exigible. □

Exercice 23. *Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = n!$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ diverge vers $+\infty$.*

Corollaire 1. *On considère une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, si la suite $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.*

Démonstration. Exigible. □

Corollaire 2. *On considère deux suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée et que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 alors la suite $(u_nv_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.*

Démonstration. Exigible. □

Exercice 24. *Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = \dfrac{\sin n}{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ converge vers 0.*

Théorème 3. Théorème de convergence monotone
On considère une suite réelle croissante, alors :

- *si la suite n'est pas majorée elle diverge vers $+\infty$.*
- *si la suite est majorée elle converge vers son plus petit majorant (borne supérieure).*

Démonstration. Hors-programme - On considère la borne supérieure de l'ensemble $E = \{u_n \ / \ n \in \mathbb{N}\}$. □

Exercice 25. *Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{k=n} \frac{1}{k!}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ est convergente et donner un encadrement de sa limite.* (*on pourra remarquer que $k! \geqslant 2^{k-1}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$*)

Corollaire 3. *On considère une suite réelle décroissante, alors :*

- *si la suite n'est pas minorée elle diverge vers $-\infty$.*
- *si la suite est minorée elle converge vers son plus grand minorant (borne inférieure).*

Démonstration. Exigible. □

Définition 16. *On appelle* **suites adjacentes** *deux suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et $(v_n - u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.*

Exercice 26. *Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par $u_n = 1 - \dfrac{1}{n+1}$ et $v_n = 1 + \dfrac{1}{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ sont adjacentes.*

Propriété 14. *Si deux suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes avec $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ croissante et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroissante, alors $u_n \leqslant v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

Démonstration. Exigible - On suppose par l'absurde qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $u_N > v_N$ et on remarque qu'alors $u_n - v_n \geqslant u_N - v_N$ pour tout $n \geqslant N$. □

Théorème 4. *Deux suites adjacentes convergent vers la même limite.*

Démonstration. Exigible - On utilise le théorème de la limite monotone. □

6 Relations de comparaison

Définition 17. *On considère deux suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on dit que :*

- *la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est* **dominée** *par la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et on note $u_n = O(v_n)$ s'il existe une suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bornée telle que $u_n = \alpha_n v_n$ à partir d'un certain rang.*
- *la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est* **négligeable** *devant la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et on note $u_n = o(v_n)$ s'il existe une suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de limite nulle telle que $u_n = \alpha_n v_n$ à partir d'un certain rang.*
- *la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est* **équivalente** *à la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et on note $u_n \sim v_n$ s'il existe une suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de limite 1 telle que $u_n = \alpha_n v_n$ à partir d'un certain rang.*

Remarque 12. *Si la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne s'annule pas, ceci revient à dire que la suite $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, converge vers 0 ou converge vers 1.*

Remarque 13. *Si $u_n = o(v_n)$ ou $u_n \sim v_n$ alors $u_n = O(v_n)$.*

Remarque 14. *$u_n \sim v_n$ équivaut à $u_n - v_n = o(v_n)$.*

Exemple 1. *$n \sin n = O(n)$, $n = o(n^2)$ et $n + 1 \sim n$.*

Exercice 27. *Que signifie pour une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que $u_n = o(0)$, $u_n = o(1)$ ou que $u_n \sim l$ avec $l \in \mathbb{R}$?*

Exercice 28. *Montrer que si $u_n \sim v_n$ alors les suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ont même signe à partir d'un certain rang.*

Propriété 15. *On considère trois suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$:*

- *si $u_n \sim v_n$ alors $v_n \sim u_n$. (symétrie)*
- *si $u_n \sim v_n$ et $v_n \sim w_n$ alors $u_n \sim w_n$. (transitivité)*

Démonstration. Exigible. □

Propriété 16. **Équivalent d'un produit et d'un quotient**
On considère quatre suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(u'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $u_n \sim v_n$ et $u'_n \sim v'_n$ alors $u_n u'_n \sim v_n v'_n$ et $\dfrac{u_n}{u'_n} \sim \dfrac{v_n}{v'_n}$ si les suites $(u'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne s'annulent pas.

Démonstration. Exigible. □

Exercice 29. *Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = \dfrac{2n^2 - 1}{n^2 + n + 1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ en utilisant les équivalents.*

Exercice 30. *Peut-on étendre la propriété à la somme ou à la différence de deux suites ?*

Propriété 17. **Comparaison des suites de référence**
On considère $a, \alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^*$, alors :

- $(\ln n)^\alpha = o(n^\beta)$
- $n^\alpha = o(a^n)$ *si $a > 1$ et* $a^n = o\left(\dfrac{1}{n^\alpha}\right)$ *si $a < 1$.*
- $a^n = o(n!)$ *si $a > 1$.*

Démonstration. Exigible - On utilise les croissances comparées des fonctions usuelles (Chap II) et on remarque que $\dfrac{a^n}{n!} \leqslant \dfrac{a}{n} \displaystyle\prod_{k=1}^{E(a)} \dfrac{a}{k}$. □

7 Suites complexes

Définition 18. *On appelle* **suite de nombres complexes** *une application* $z : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{C} \\ n & \mapsto & z(n) = z_n \end{array}$.

Exemple 2. *La suite* $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définie par* $z_n = \dfrac{1+ni}{1+n}$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *est une suite complexe.*

Remarque 15. *Étant donnée une suite complexe* $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *on peut définir les suites réelles* $(\mathcal{R}e(z_n))_{n\in\mathbb{N}}$, $(\mathcal{I}m(z_n))_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(|z_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ *et la suite complexe* $(\overline{z_n})_{n\in\mathbb{N}}$.

On peut définir la notion de suite complexe bornée.

Définition 19. *Une suite complexe* $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est dite bornée si la suite* $(|z_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ *est majorée.*

Exercice 31. *Interpréter graphiquement la notion de suite complexe bornée.*

On peut définir la notion de limite d'une suite complexe.

Définition 20. *Une suite complexe* $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *admet une limite* $l \in \mathbb{C}$ *si la suite réelle* $(|z_n - l|)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers* 0.

Exercice 32. *Interpréter graphiquement la notion de limite d'une suite complexe.*

Exercice 33. *Étudier la convergence de la suite* $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définie par* $z_n = \dfrac{1+ni}{1+n}$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$.

Propriété 18. *Une suite complexe* $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *admet une limite* $l \in \mathbb{C}$ *si et seulement si les suites réelles* $(\mathcal{R}e(z_n))_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(\mathcal{I}m(z_n))_{n\in\mathbb{N}}$ *convergent respectivement vers* $\mathcal{R}e(l)$ *et* $\mathcal{I}m(l)$.

Démonstration. Exigible - On remarque que $|z_n - l| = \sqrt{[\mathcal{R}e(z_n) - \mathcal{R}e(l)]^2 + [\mathcal{I}m(z_n) - \mathcal{I}m(l)]^2}$. $\square$

Corollaire 4. *Une suite complexe convergente est bornée.*

Démonstration. Exigible - On remarque que la suite $(|z_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $|l|$. $\square$

On peut également effectuer des opérations sur les limites :

Propriété 19. *On considère deux suites complexes* $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(z'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *qui convergent respectivement vers les limites* l *et* l', *alors :*
- *la suite* $(z_n) + (z'_n)$ *converge vers* $l + l'$.
- *la suite* $(z_n) \times (z'_n)$ *converge vers* $l \times l'$.

Démonstration. Exigible - On remarque que $|(z_n + z'_n) - (l + l')| \leqslant |z_n - l| + |z'_n - l'|$ et que $|z_n z'_n - ll'| \leqslant |(z_n - l)z'_n| + |l(z'_n - l')|$. $\square$