Devoir surveillé de Mathématiques n°4

N.B : L'élève attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.

Si un élève est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Exercice 1 **(Résolution d'équations différentielles)**

1. Résoudre l'équation différentielle $(t^2+1)y' + ty = 1$.
2. Résoudre l'équation différentielle $y''+4y = 5\sin(3t)$ avec les conditions initiales $y(0) = 2$ et $y'(0) = -3$.

Exercice 2 **(Équation différentielle d'ordre 2 à coefficients non constants)**

1. Résoudre les équations différentielles $\boxed{(E_1) : ty' - y = 0}$ et $\boxed{(E_2) : y' - 2ty = ate^{-t^2}}$ où y est une fonction de la variable t à valeurs réelles définie et deux fois dérivable sur l'intervalle $]0;+\infty[$ et a est un nombre réel.
2. On considère l'équation différentielle $\boxed{(E) : ty'' - y' - 4t^3y = 0}$ où y est une fonction de la variable t à valeurs réelles définie et deux fois dérivable sur l'intervalle $]0;+\infty[$.
   (a) Étant donnée une solution y de (E), on définit la fonction $w : t \mapsto e^{t^2}(y'(t) - 2ty(t))$, montrer que w est solution de (E_1).
   (b) En déduire que si y est une solution de (E) alors il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que y soit solution de (E_2).
   (c) Déterminer les solutions de l'équation (E).

Exercice 3 **(Équation fonctionnelle)**

On considère l'équation fonctionnelle $\boxed{(E) : y(-t) - y'(t) = t^2}$ ou y est une fonction de la variable t à valeurs réelles définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

1. Montrer qu'une solution de (E) est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et est solution d'une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants que l'on résoudra.
2. En déduire les solutions de l'équation (E).