

XI. Espaces vectoriels - Applications linéaires

1 Espaces vectoriels

On note $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Définition 1. On appelle **loi externe** . sur un ensemble E , une application $\mathbb{K} \times E \rightarrow E$.
 $(\lambda; x) \mapsto \lambda.x$

Exemple 1. La multiplication par un scalaire est une loi externe sur $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$, $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, $\mathbb{R}[X]$, $\mathbb{C}[X]$ et sur l'ensemble des suites réelles ou complexes.

Définition 2. On appelle $\mathbb{K}$ -**espace vectoriel** un ensemble E muni d'une **loi interne** $+$ telle que $(E, +)$ est un groupe commutatif (la loi $+$ est associative, commutative, admet un élément neutre, et tout élément de E admet un élément symétrique) et d'une **loi externe** . telle que :

- $1.\vec{u} = \vec{u}$ pour tout $\vec{u} \in E$.
- $(\lambda\mu).\vec{u} = \lambda.(\mu.\vec{u})$ pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ et pour tout $\vec{u} \in E$.
- $\lambda.(\vec{u} + \vec{v}) = \lambda.\vec{u} + \lambda.\vec{v}$ pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$ et pour tous $\vec{u}, \vec{v} \in E$.
- $(\lambda + \mu).\vec{u} = \lambda.\vec{u} + \mu.\vec{u}$ pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ et pour tout $\vec{u} \in E$.

Remarque 1. On appelle **vecteur nul** et on note $\vec{0}$ l'élément neutre de E pour la loi $+$.

Exemple 2. $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$, $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $\mathbb{R}[X]$ et l'ensemble des suites réelles sont des $\mathbb{R}$ -espaces vectoriels. $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, $\mathbb{C}[X]$ et l'ensemble des suites complexes sont des $\mathbb{C}$ -espaces vectoriels.

Propriété 1. On considère un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E , alors pour tout $\vec{u} \in E$ on a :

- $0.\vec{u} = \vec{0}$
- $(-1).\vec{u} = -\vec{u}$

Démonstration. Exigible - On calcule $\vec{u} + 0.\vec{u}$ et $\vec{u} + (-1).\vec{u}$. □

Définition 3. On considère un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel $(E, +, .)$, on dit que $(F, +, .)$ est un **sous-espace vectoriel** de $(E, +, .)$ si $(F, +, .)$ est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et $F \subset E$.

Remarque 2. $\{\vec{0}\}$ et E sont des sous-espaces vectoriels de E .

Propriété 2. On considère un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel $(E, +, .)$ alors $(F, +, .)$ est un sous-espace vectoriel de $(E, +, .)$ si $F \subset E$, $\vec{0} \in F$ et si F est **stable par combinaisons linéaires** (pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ et pour tous $\vec{u}, \vec{v} \in F$ on a $\lambda.\vec{u} + \mu.\vec{v} \in F$).

Démonstration. Exigible. □

Exercice 1. Montrer que $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 / x + y = 0 \right\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$, le représenter graphiquement.

Exercice 2. Montrer que l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y'' + y = 0$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Exercice 3. L'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré 3 est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$?

Propriété 3. L'intersection de deux sous-espaces vectoriels de E est un sous-espace vectoriel de E .

Démonstration. Exigible. □

Exercice 4. Montrer que $F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 / x + y = 0 \right\}$ et $G = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 / x - y = 0 \right\}$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$, représenter graphiquement F , G et $F \cap G$.

Exercice 5. L'union de deux sous-espaces vectoriels de E est-il un sous-espace vectoriel de E ?

Propriété 4. Somme de sous-espaces vectoriels

Si F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E alors $F + G = \{ \vec{u} + \vec{v} / \vec{u} \in F \text{ et } \vec{v} \in G \}$ est le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant $F \cup G$.

Démonstration. Exigible. □

Exercice 6. On considère $F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 / y = z = 0 \right\}$ et $G = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 / x = z = 0 \right\}$, déterminer $F + G$, représenter graphiquement F , G et $F + G$.

Définition 4. Somme directe de sous-espaces vectoriels

On considère deux sous-espaces vectoriels F et G de E , si pour tout $\vec{w} \in F + G$ il existe un unique couple $(\vec{u}, \vec{v}) \in F \times G$ tel que $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$ alors la somme $F + G$ est dite directe et notée $F \oplus G$.

Exercice 7. Montrer que la somme de l'exercice 6 est directe.

Propriété 5. Deux sous-espaces vectoriels F et G de E sont en somme directe si et seulement si $F \cap G = \{ \vec{0} \}$.

Démonstration. Exigible. □

Définition 5. Sous-espaces vectoriels supplémentaires

Deux sous-espaces vectoriels F et G de E sont dits supplémentaires si $F \oplus G = E$.

Exercice 8. Déterminer deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathbb{R}^3$.

Propriété 6. Sous-espace vectoriel engendré par une famille de vecteurs

Si $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n)$ est une famille de n vecteurs d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E alors l'ensemble des combinaisons linéaires de ces vecteurs $\text{Vect}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n) = \{ \lambda_1 \vec{u}_1 + \lambda_2 \vec{u}_2 + \dots + \lambda_n \vec{u}_n / \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K} \}$ est le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant les vecteurs $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n$.

Démonstration. Exigible. □

Remarque 3.

- Pour $n = 0$, on convient que $\text{Vect}(\emptyset) = \{ \vec{0} \}$.
- Pour $n = 1$ et $\vec{u} \neq \vec{0}$, $\text{Vect}(\vec{u}) = \{ \lambda \vec{u} / \lambda \in \mathbb{K} \}$ est appelé **droite vectorielle** engendrée par le vecteur $\vec{u}$.
- Pour $n = 2$ et $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non colinéaires, $\text{Vect}(\vec{u}, \vec{v}) = \{ \lambda \vec{u} + \mu \vec{v} / \lambda, \mu \in \mathbb{K} \}$ est appelé **plan vectoriel** engendré par les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Exercice 9. On considère les polynômes $P(X) = X^2 + X + 1$ et $Q(X) = 2X - 1$, déterminer une condition nécessaire et suffisante sous la forme d'une relation entre a, b et c pour que le polynôme $aX^2 + bX + c$ appartienne à $\text{Vect}(P, Q)$.

2 Espaces vectoriels de dimension finie

Définition 6. Si $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n)$ est une famille de n vecteurs d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E telle que $\text{Vect}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n) = E$ on dit qu'elle est **génératrice** de E , l'espace vectoriel E est alors dit de **dimension finie**.

Exercice 10. Déterminer une famille génératrice de l'espace vectoriel $\mathbb{R}_3[X]$ des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 3.

Remarque 4. Les espaces vectoriels $\mathbb{R}[X]$ et $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ sont de dimension infinie.

Définition 7. Une famille de vecteurs est dite **libre** si aucun de ses vecteurs ne peut s'écrire comme une combinaison linéaire des autres. Une famille de vecteurs qui n'est pas libre est dite **liée**.

Remarque 5. Comme $\text{Vect}(\emptyset) = \{\vec{0}\}$, on convient que $(\vec{0})$ n'est pas une famille libre.

Remarque 6. Deux vecteurs non colinéaires forment une famille libre, trois vecteurs non coplanaires forment une famille libre.

Exercice 11. Montrer que $(\sin, \cos)$ est une famille libre de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Propriété 7. Une famille $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n)$ de n vecteurs d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E est libre si et seulement si $\sum_{k=1}^n \lambda_k \vec{u}_k = \vec{0}$ avec $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ implique $\lambda_k = 0$ pour tout $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$.

Démonstration. Exigible. □

Exercice 12. Montrer que $(1, X, X^2, X^3, \dots, X^n)$ est une famille libre de $\mathbb{R}[X]$.

Propriété 8. On considère une famille $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n)$ de n vecteurs génératrice d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E alors toute famille libre de E est formée d'au plus n vecteurs.

Démonstration. Exigible dans le cas $n = 1$ ou $n = 2$ - On montre qu'une famille de $n + 1$ vecteurs est liée. □

Propriété 9. On considère une famille libre $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n)$ de n vecteurs d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E alors toute famille génératrice de E est formée d'au moins n vecteurs.

Démonstration. Exigible - On raisonne par l'absurde et on utilise la propriété 8. □

Définition 8. On appelle **base** d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E de dimension finie une famille libre et génératrice de E .

Exercice 13. Déterminer une base de $\mathbb{R}^3$ puis de $\mathbb{R}_3[X]$.

Propriété 10. Deux bases d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E de dimension finie ont le même nombre de vecteurs.

Démonstration. Exigible - On utilise les propriétés 8 et 9. □

Théorème 1. Théorème de la base incomplète

On considère un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E de dimension finie alors :

- de toute famille génératrice de E on peut extraire une base de E .
- toute famille libre de E peut être complétée en une base de E .

Démonstration. Procédé exigible. □

Corollaire 1. *Tout $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie admet une base, toutes les bases de E ont le même nombre de vecteurs appelé **dimension** de l'espace vectoriel E et noté $\dim E$.*

Démonstration. Exigible. □

Remarque 7. *On a $\dim(\{\vec{0}\}) = 0$.*

Exemple 3. $\left(\vec{e}_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{e}_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{e}_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ est une base dite **base canonique** de $\mathbb{R}^3$.

Exemple 4. $(1, X, X^2, X^3, \dots, X^n)$ est une base dite **base canonique** de l'ensemble $\mathbb{R}_n[X]$ des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n .

Corollaire 2. *On considère un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E de dimension finie n alors :*

- toute famille de n vecteurs génératrice de E est une base de E .
- toute famille libre de n vecteurs est une base de E .

Démonstration. Exigible. □

Exercice 14. Montrer que $\left(\vec{e}_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{e}_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ est une base de $\mathbb{R}^2$.

Propriété 11. *On considère un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E de dimension finie muni d'une base $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$ alors pour tout vecteur $\vec{u} \in E$ il existe un unique n -uplet $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ de scalaires tels que $\vec{u} = \sum_{k=1}^n \lambda_k \vec{e}_k$, les scalaires λ_k pour $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$ sont appelés **coordonnées** du vecteur $\vec{u}$ dans la base $\mathcal{B}$.*

Démonstration. Exigible - On utilise le fait que $\mathcal{B}$ est génératrice et libre. □

Exercice 15. Déterminer les coordonnées du polynôme $P(X) = X^3 - 1$ dans la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}_3[X]$.

Exercice 16. Montrer que $\mathcal{B}' = (1, 1+X, 1+X+X^2, 1+X+X^2+X^3)$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]$, déterminer les coordonnées du polynôme $P(X) = X^3 - 1$ dans cette base.

3 Dimension d'un sous-espace vectoriel

Propriété 12. *Tout sous-espace vectoriel F d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E de dimension finie est de dimension finie et $\dim F \leq \dim E$ de plus $\dim F = \dim E$ si et seulement si $E = F$.*

Démonstration. Exigible - On remarque qu'une famille libre de F est une famille libre de E . □

Définition 9. *On appelle **rang** d'une famille de vecteurs la dimension de l'espace vectoriel engendré par celle-ci, on note $\text{rg}(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n) = \dim(\text{Vect}(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n))$.*

Exercice 17. Déterminer le rang de la famille de vecteurs $\left(\vec{u}_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{u}_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{u}_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$ dans $\mathbb{R}^3$.

Propriété 13. *Tout sous-espace vectoriel F d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E de dimension finie admet un supplémentaire G et $\dim F + \dim G = \dim E$.*

Démonstration. Exigible - On utilise le théorème de la base incomplète. $\square$

Remarque 8. *Il n'y a pas unicité du supplémentaire.*

Exercice 18. *Déterminer un supplémentaire de $F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 / z = 0 \right\}$ dans $\mathbb{R}^3$.*

Théorème 2. formule de Grassmann

Si F et G sont deux sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E de dimension finie alors $F + G$ est de dimension finie et $\dim(F + G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G)$.

Démonstration. Exigible - On complète une base de $F \cap G$ en une base de F puis en une base de G et on montre que la famille formée par l'ensemble des vecteurs de ces bases est une base de $F + G$. $\square$

Corollaire 3. *Deux sous-espaces vectoriels F et G d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E de dimension finie sont supplémentaires si et seulement si $F \cap G = \{\vec{0}\}$ et $\dim F + \dim G = \dim E$.*

Démonstration. Exigible. $\square$

Remarque 9. *On a également F et G supplémentaires si et seulement si $F + G = E$ et $\dim F + \dim G = \dim E$.*

4 Applications linéaires

Définition 10. *On dit qu'une application $f : E \rightarrow F$ où E et F sont deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels est **linéaire** si pour tous $\vec{u}, \vec{v} \in E$ et pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ on a $f(\lambda\vec{u} + \mu\vec{v}) = \lambda f(\vec{u}) + \mu f(\vec{v})$. On note $\mathcal{L}(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F .*

Remarque 10. *Si f est linéaire, $f(\vec{0}_E) = \vec{0}_F$.*

Remarque 11. $\mathcal{L}(E, F)$ est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

Exemple 5. *Une homothétie vectorielle de rapport $k \in \mathbb{K}$ est une application linéaire :*

$$f : \begin{array}{ccc} E & \rightarrow & E \\ \vec{u} & \mapsto & k\vec{u} \end{array}$$

Exemple 6. *La dérivation est une application linéaire :*

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}[X] & \rightarrow & \mathbb{K}[X] \\ P & \mapsto & P' \end{array}$$

Exercice 19. *Montrer que l'application $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} x+y \\ x-y \end{pmatrix} \end{array}$ est linéaire.*

Définition 11.

- Une application linéaire de E dans E est appelée un **endomorphisme**, on note $\mathcal{L}(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E .
- Une application linéaire de E dans $\mathbb{K}$ est appelée une **forme linéaire**.

Exercice 20. Donner un exemple de forme linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ puis donner un exemple de forme linéaire de $\mathbb{R}[X]$ dans $\mathbb{R}$.

Exercice 21. L'application $f \mapsto f \circ f$ est-elle un endomorphisme de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$?

Propriété 14. La composée de deux applications linéaires est une application linéaire.

Démonstration. Exigible. □

Définition 12. Une application linéaire bijective est appelée un **isomorphisme**.

Propriété 15. L'application réciproque d'un isomorphisme est un isomorphisme.

Démonstration. Exigible. □

Définition 13. Un endomorphisme bijectif est appelé un **automorphisme**.

Exercice 22. Montrer que l'application f de l'exercice 19 est un automorphisme de $\mathbb{R}^2$ et expliciter son application réciproque.

Propriété 16. L'ensemble des automorphismes d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E est un groupe pour la loi $\circ$ appelé **groupe linéaire** et noté $\text{GL}(E)$.

Démonstration. Exigible. □

Définition 14. On considère $f \in \mathcal{L}(E, F)$ où E et F sont deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels.

- on appelle **noyau** de f , $\text{Ker } f = f^{-1}(\{\vec{0}_F\}) = \{\vec{u} \in E / f(\vec{u}) = \vec{0}_F\}$.
- on appelle **image** de f , $\text{Im } f = f(E) = \{f(\vec{u}) / \vec{u} \in E\}$.

Exercice 23. Déterminer le noyau et l'image de l'application linéaire $f : \begin{matrix} \mathbb{K}[X] & \rightarrow & \mathbb{K}[X] \\ P & \mapsto & P' \end{matrix}$.

Exercice 24. Déterminer le noyau et l'image de la forme linéaire $f : \begin{matrix} \mathbb{R}^3 & \rightarrow & \mathbb{R} \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \mapsto & x + y + z \end{matrix}$.

Propriété 17. On considère $f \in \mathcal{L}(E, F)$ où E et F sont deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels, alors $\text{Ker } f$ est un sous-espace vectoriel de E et $\text{Im } f$ est un sous-espace vectoriel de F .

Démonstration. Exigible. □

Propriété 18. On considère $f \in \mathcal{L}(E, F)$ où E et F sont deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels, alors :

- f est injective si et seulement si $\text{Ker } f = \{\vec{0}_E\}$.
- f est surjective si et seulement si $\text{Im } f = F$.

Démonstration. Exigible. □

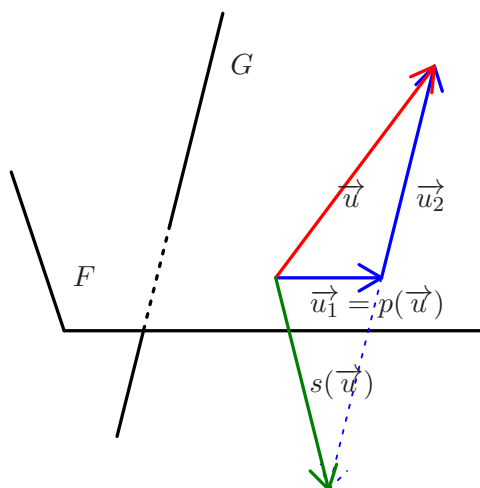
Définition 15.

On considère deux sous-espaces vectoriels F et G supplémentaires d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E , pour tout $\vec{u} \in E$ il existe un unique couple $(\vec{u}_1, \vec{u}_2) \in F \times G$ tel que $\vec{u} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2$:

- l'application linéaire $p : \begin{matrix} E & \rightarrow & E \\ \vec{u} & \mapsto & \vec{u}_1 \end{matrix}$ est appelée **projection** (ou **projecteur**) sur

F parallèlement à G ,

- l'application linéaire $s : \begin{matrix} E & \rightarrow & E \\ \vec{u} & \mapsto & \vec{u}_1 - \vec{u}_2 \end{matrix}$ est appelée **symétrie** par rapport à F parallèlement à G .



Remarque 12. p est un endomorphisme de E et $p \circ p = p$, $s \circ s = Id$ donc s est un automorphisme d'application réciproque s .

Exemple 7. L'application linéaire $p : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ est une projection.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$$

Exemple 8. L'application linéaire $s : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ est une symétrie.

$$z \mapsto \bar{z}$$

Exercice 25. On considère p projection sur F parallèlement à G , déterminer $\text{Ker } p$ et $\text{Im } p$.

Exercice 26. On considère s symétrie par rapport à F parallèlement à G , déterminer $\text{Ker}(s - Id)$ et $\text{Ker}(s + Id)$.

Propriété 19. Un endomorphisme p d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E tel que $p \circ p = p$ est une projection sur $\text{Im } p$ parallèlement à $\text{Ker } p$.

Démonstration. Exigible - On utilise la décomposition $\vec{u} = p(\vec{u}) + (\vec{u} - p(\vec{u}))$. □

Propriété 20. Un endomorphisme s d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E tel que $s \circ s = Id$ est une symétrie par rapport à $\text{Ker}(s - Id)$ parallèlement à $\text{Ker}(s + Id)$.

Démonstration. Exigible - On utilise la décomposition $\vec{u} = \frac{1}{2}(\vec{u} + s(\vec{u})) + \frac{1}{2}(\vec{u} - s(\vec{u}))$. □

5 Applications linéaires en dimension finie

Propriété 21. Une application linéaire $f \in \mathcal{L}(E, F)$ où E et F sont deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de dimension finie est entièrement déterminée par l'image $(f(\vec{e}_1), f(\vec{e}_2), \dots, f(\vec{e}_n))$ d'une base quelconque $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$ de E .

Démonstration. Exigible. □

Exercice 27. Déterminer l'application linéaire f telle que $f(\vec{e}_1) = \vec{e}_1 + \vec{e}_2$ et $f(\vec{e}_2) = \vec{e}_1$ où $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

Définition 16. On appelle **rang** d'une application linéaire $f \in \mathcal{L}(E, F)$ où E et F sont deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de dimension finie, $\boxed{\text{rg } f = \dim(\text{Im } f)}$.

Remarque 13. Une application linéaire $f \in \mathcal{L}(E, F)$ avec $\dim E = \dim F$ est surjective si et seulement si $\text{rg } f = \dim F$.

Théorème 3. **Théorème du rang**

On considère une application linéaire $f \in \mathcal{L}(E, F)$ où E et F sont deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de dimension finie, alors :

$$\text{rg } f = \dim E - \dim(\text{Ker } f)$$

Démonstration. Hors-programme - On montre que f définit un isomorphisme de tout supplémentaire de $\text{Ker } f$ dans $\text{Im } f$. □

Exercice 28. Déterminer le rang de l'application $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x+y \\ x-y \\ -x+y \end{pmatrix}$$

Remarque 14. Si $f \in \mathcal{L}(E, F)$ est bijective, nécessairement $\dim E = \dim F$.

Corollaire 4. On considère une application linéaire $f \in \mathcal{L}(E, F)$ où E et F sont deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de dimension finie avec $\dim E = \dim F$, alors :

$$f \text{ injective} \Leftrightarrow f \text{ surjective} \Leftrightarrow f \text{ bijective}$$

Démonstration. Exigible. □

Exercice 29. Montrer que $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}_2[X]$ est un isomorphisme.

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \mapsto aX^2 + bX + c$$

Exercice 30. Montrer que $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ est un automorphisme de $\mathbb{R}^3$.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x+y \\ y+z \\ x+z \end{pmatrix}$$

6 Hyperplans

Définition 17. On appelle **hyperplan** d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E de dimension finie $n \geq 1$ un sous-espace vectoriel de E de dimension $n - 1$.

Exemple 9. Dans $\mathbb{R}^3$ les hyperplans sont les plans vectoriels, dans $\mathbb{R}^2$ les hyperplans sont les droites vectorielles.

Propriété 22. Une partie H d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E de dimension finie $n \geq 1$ est un hyperplan si et seulement si H est le noyau d'une forme linéaire non nulle $f : E \rightarrow \mathbb{K}$. L'équation $f(\vec{u}) = 0$ est appelée une **équation cartésienne** de l'hyperplan H .

Démonstration. Exigible - Pour le sens direct, on complète une base de H en une base de E et on définit $f(\vec{u})$ comme la dernière coordonnée de $\vec{u}$ dans cette base ; pour la réciproque, on utilise le théorème du rang. $\square$

Exercice 31. Déterminer une base de $\text{Ker } f$ où $f : \mathbb{R}_2[X] \rightarrow \mathbb{R}$.

$$aX^2 + bX + c \mapsto a + b + c$$

Exercice 32. Déterminer une équation cartésienne de l'hyperplan $H = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ de $\mathbb{R}^3$.