

XI. Espaces vectoriels - Applications linéaires

Exercice 1

Montrer que l'ensemble des suites réelles convergentes est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des suites réelles.

L'ensemble des suites réelles qui divergent vers $+\infty$ est-il un sous-espace vectoriel de l'ensemble des suites réelles ?

Exercice 2

Montrer que l'ensemble des fonctions paires et l'ensemble des fonctions impaires sont deux sous-espaces vectoriels de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Exercice 3

L'ensemble des fonctions monotones est-il un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$?

Exercice 4

On considère deux sous-espaces vectoriels F et G d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E , montrer que $F + G = F \cap G$ si et seulement si $F = G$.

Exercice 5

Montrer que l'ensemble des fonctions paires et l'ensemble des fonctions impaires sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Exercice 6

Montrer que l'ensemble des fonctions constantes et l'ensemble des fonctions s'annulant en 0 sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Exercice 7

Montrer que l'ensemble des fonctions linéaires et l'ensemble des fonctions s'annulant en 1 sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Exercice 8

On considère les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$, $F = \left\{ \begin{pmatrix} t \\ t \\ 0 \end{pmatrix} / t \in \mathbb{R} \right\}$ et $G = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ t \\ t \end{pmatrix} / t \in \mathbb{R} \right\}$.

Déterminer $F + G$, la somme $F + G$ est-elle directe ?

Exercice 9

On considère les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}[X]$, $F = \{P \in \mathbb{R}[X] / P(0) = 0\}$ et $G = \{P \in \mathbb{R}[X] / P'(0) = 0\}$.
Déterminer $F + G$, la somme $F + G$ est-elle directe ?

Exercice 10

Dans le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel $\mathbb{C}$, déterminer $\text{Vect}(1, i)$.

Exercice 11

Dans le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, déterminer $\text{Vect}(x \mapsto \cos(x + \frac{k\pi}{4}), k \in \llbracket 0; 7 \rrbracket)$.

Exercice 12

Montrer que l'ensemble des fonctions à valeurs réelles solutions de l'équation différentielle $y'' - 2y' + 2y = 0$ est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie.

Exercice 13

$((X - 1)(X - 2), (X - 2)(X - 3), (X - 1)(X - 3))$ est-elle une famille libre de $\mathbb{R}[X]$?

Exercice 14

Montrer que si $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est une famille libre alors $(\vec{u} + \vec{v}, \vec{v} + \vec{w}, \vec{u} + \vec{w})$ est une famille libre.

Exercice 15

Montrer que $(1, 1 + X, 1 + X + X^2, \dots, 1 + X + X^2 + \dots + X^n)$ est une famille libre de $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 16

Donner une base de $\mathbb{C}^3$ en tant que $\mathbb{C}$ -espace vectoriel puis en tant que $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

Exercice 17

Déterminer une base du sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$, $E = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} / x + y + z = 0 \right\}$ puis la compléter en une base de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 18

Montrer que $\left(\vec{e}_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{e}_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{e}_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ est une base de $\mathbb{R}^3$, calculer les coordonnées d'un vecteur $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ dans cette base.

Exercice 19

Trouver le rang de la famille de vecteurs $(1 + X, 1 - X, 1 + X^2, 1 - X^2)$ dans $\mathbb{R}_2[X]$.

Exercice 20

Déterminer un supplémentaire de $\text{Vect}(1 + X + X^2)$ dans $\mathbb{R}_2[X]$.

Exercice 21

Montrer que $\phi : \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ est une forme linéaire.

$$f \mapsto \int_0^1 f(x) \, dx$$
Exercice 22

Montrer qu'une forme linéaire f sur un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E est soit nulle soit surjective.

Exercice 23

Montrer que $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ est un automorphisme et déterminer son application réciproque.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ x + y \\ x + y + z \end{pmatrix}$$
Exercice 24

Montrer que $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ est une application linéaire, déterminer son noyau et son image ainsi que leurs dimensions.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x + y \\ y + z \end{pmatrix}$$
Exercice 25

Montrer que $f : P(X) \mapsto XP'(X) - 2P(X)$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$, déterminer son noyau et son image ainsi que leurs dimensions.

Exercice 26

On considère $f, g \in \mathcal{L}(E)$ où E est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. Montrer que $\text{Im } f \subset \text{Ker } g$ si et seulement si $g \circ f = 0$.

Exercice 27

On considère $f, g \in \mathcal{L}(E)$ où E est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. Montrer que $f(\text{Ker } g \circ f) = \text{Ker } g \cap \text{Im } f$.

Exercice 28

Montrer que $f : P \mapsto P - P'$ est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ et expliciter son application réciproque. (on pourra utiliser des dérivées successives)

Exercice 29

Étant donné $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$, on définit $p(\vec{u}) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ x+y \end{pmatrix}$ et $s(\vec{u}) = \begin{pmatrix} x \\ z \\ y \end{pmatrix}$, montrer que p est un projecteur et s une symétrie et déterminer leurs éléments caractéristiques.

Exercice 30

Dans $\mathbb{R}^3$, on considère les sous-espaces vectoriels $F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} / x + y + z = 0 \right\}$ et $G = \text{Vect} \left(\vec{e}_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$. Déterminer une base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ de F , montrer que $F \oplus G = \mathbb{R}^3$ et calculer les coordonnées d'un vecteur $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ dans la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$. En déduire l'expression analytique de la projection p sur F parallèlement à G et de la symétrie s par rapport à F parallèlement à G .

Exercice 31

Dans $\mathbb{R}_2[X]$, déterminer l'expression analytique de la symétrie s par rapport à $\text{Vect}(1 + X + X^2)$ parallèlement à $\text{Vect}(1, X)$.

Exercice 32

Montrer que $p \in \mathcal{L}(E)$ est un projecteur si et seulement si $s = 2p - Id$ est une symétrie.

Exercice 33

Montrer que si $s \in \mathcal{L}(E)$ est une symétrie alors $\text{Im}(s + Id) = \text{Ker}(s - Id)$.

Exercice 34

On considère $f \in \mathcal{L}(E)$ où E est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie, que peut-on dire de $\text{rg}(-f)$ et $\text{rg}(2f)$?

Exercice 35

On considère $f, g \in \mathcal{L}(E)$ où E est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie, montrer que $|\text{rg } f - \text{rg } g| \leq \text{rg}(f + g) \leq \text{rg } f + \text{rg } g$.

Exercice 36

On considère $f \in \mathcal{L}(E)$ où E est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie. Montrer que $\text{Ker } f \oplus \text{Im } f = E$ si et seulement si $\text{Ker } f \cap \text{Im } f = \{\vec{0}\}$.

Exercice 37

Montrer que $H = \{P \in \mathbb{R}_n[X] \mid P(1) = 0\}$ est un hyperplan de $\mathbb{R}_n[X]$ et en déterminer une base.

Exercice 38

Montrer que si H_1 et H_2 sont deux hyperplans distincts d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie E alors $\dim(H_1 \cap H_2) = \dim E - 2$.

Problème 1 (Liberté de la famille $(\sin x, \sin 2x, \dots, \sin nx)$)

1. Exprimer $\sin a \sin b$ en fonction de $\cos(a + b)$ et $\cos(a - b)$.
2. Calculer $\int_0^{2\pi} \sin px \sin qx \, dx$ pour $p, q \in \mathbb{N}^*$.
3. En déduire que $(\sin x, \sin 2x, \dots, \sin nx)$ est une famille libre de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Problème 2 (Suite récurrente linéaire)

On considère l'ensemble E des suites réelles $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifiant la relation de récurrence $u_{n+2} = \frac{u_n + u_{n+1}}{2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que E est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.
2. Déterminer les deux valeurs possibles r_1 et r_2 de la raison d'une suite géométrique non nulle appartenant à E .
3. En déduire que E est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension 2 et en donner une base.
4. Déterminer une forme explicite de la suite
$$\begin{cases} u_0 &= 0 \\ u_1 &= 1 \\ u_{n+2} &= \frac{u_n + u_{n+1}}{2}, \quad n \in \mathbb{N} \end{cases}.$$

Réponses

Exercices

- 1) On remarque que la suite nulle n'est pas une suite qui diverge vers $+\infty$.
- 2) On remarque que la fonction nulle est une fonction paire et qu'une combinaison linéaire de fonctions paires est une fonction paire, on remarque que la fonction nulle est une fonction impaire et qu'une combinaison linéaire de fonctions impaires est une fonction impaire.
- 3) Si f est la fonction identité et g la fonction cube, $f - g$ n'est pas monotone.
- 4) Pour le sens direct on remarque que $F \subset F + G = F \cap G \subset G$.
- 5) On remarque que $f(x) = \frac{1}{2}[f(x) + f(-x)] + \frac{1}{2}[f(x) - f(-x)]$ et que la seule fonction à la fois paire et impaire est la fonction nulle.
- 6) On remarque que $f(x) = f(0) + [f(x) - f(0)]$ et qu'une fonction constante s'annulant en 0 est nulle.
- 7) On remarque que $f(x) = f(1)x + [f(x) - f(1)x]$ et qu'une fonction linéaire s'annulant en 1 est nulle.
- 8) $F \oplus G = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} / x - y + z = 0 \right\}$.
- 9) $F + G = \mathbb{R}[X]$ car $P(X) = (P(X) - P(0)) + P(0)$, on remarque que la somme n'est pas directe en considérant le polynôme $P(X) = X^2$.
- 10) $\text{Vect}(1, i) = \mathbb{C}$.
- 11) $\text{Vect}(\cos, \sin)$.
- 12) $\text{Vect}(e^t \cos t, e^t \sin t)$.
- 13) On recherche λ, μ et ν tels que $\lambda(X-1)(X-2) + \mu(X-2)(X-3) + \nu(X-1)(X-3) = 0$ en utilisant la liberté de la famille $(1, X, X^2)$.
- 14) On recherche λ, μ et ν tels que $\lambda(\vec{u} + \vec{v}) + \mu(\vec{v} + \vec{w}) + \nu(\vec{u} + \vec{w}) = 0$ en utilisant la liberté de la famille $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$.
- 15) On procède par récurrence en remarquant que $\sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k(1 + X + \dots + X^k) = \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k(1 + X + \dots + X^k) + X^n + (\lambda_n + \lambda_{n+1})(1 + X + \dots + X^n) + \lambda_{n+1}X^{n+1}$.
- 16) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ et $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ i \end{pmatrix} \right\}$.
- 17) $\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ et $\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$.
- 18) $\vec{u} = x\vec{e}_1 + y(\vec{e}_2 - \vec{e}_1) + z(\vec{e}_3 - \vec{e}_2) = (x-y)\vec{e}_1 + (y-z)\vec{e}_2 + z\vec{e}_3$.
- 19) Le rang est 3 en remarquant que $1 = \frac{1}{2}(1+X) + \frac{1}{2}(1-X)$, $X = \frac{1}{2}(1+X) - \frac{1}{2}(1-X)$ et $X^2 = \frac{1}{2}(1+X^2) - \frac{1}{2}(1-X^2)$.
- 20) $\mathbb{R}_1[X]$.
- 21) On utilise la linéarité de l'intégrale.
- 22) Si il existe $\vec{u} \in E$ tel que $f(\vec{u}) = \alpha \neq 0$ alors pour tout $x \in \mathbb{K}$ on a par linéarité $f\left(\frac{x}{\alpha}\vec{u}\right) = x$.
- 23) f a pour application réciproque $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y-x \\ z-y \end{pmatrix}$.

- 24) $\text{Ker } f = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ et $\text{Im } f = \mathbb{R}^2$.
- 25) Pour $n \geq 2$, $\text{Ker } f = \text{Vect}(X^2)$ et $\text{Im } f = \text{Vect}(1, X, X^3, \dots, X^n)$.
- 26) On procède par double inclusion.
- 27) On procède par double inclusion.
- 28) On remarque que si P est non nul $P - P'$ est non nul donc $\text{Ker } f = \{0\}$ et f est injective donc bijective car $\mathbb{R}_n[X]$ est de dimension finie. On remarque que si $P + P' = Q$ alors $P = Q + Q' + Q'' + \dots + Q^{(n)}$.
- 29) $p \circ p = p$ donc p est un projecteur sur $\text{Im } p$ plan vectoriel d'équation $x + y - z = 0$ parallèlement à $\text{Ker } p$ droite vectorielle engendrée par le vecteur $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.
 $s \circ s = Id$ donc s est une symétrie par rapport à $\text{Ker}(s - Id)$ plan vectoriel d'équation $y - z = 0$ parallèlement à $\text{Ker}(s - Id)$ droite vectorielle engendrée par le vecteur $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.
- 30) Avec $\vec{e}_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\vec{e}_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ on a $\vec{u} = x\vec{e}_3 + y(\vec{e}_2 + \vec{e}_3 - \vec{e}_1) + z(\vec{e}_3 - \vec{e}_1) = (-y - z)\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + (x + y + z)\vec{e}_3$ d'où $p(\vec{u}) = (-y - z)\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} -y - z \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $s(\vec{u}) = (-y - z)\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 - (x + y + z)\vec{e}_3 = \begin{pmatrix} -x - 2y - 2z \\ y \\ z \end{pmatrix}$.
- 31) On a $aX^2 + bX + c = a(1 + X + X^2 - 1 - X) + bX + c = a(1 + X + X^2) + (b - a)X + (c - a)$ d'où $s(aX^2 + bX + c) = a(1 + X + X^2) - (b - a)X - (c - a) = aX^2 + (2a - b)X + (2a - c)$.
- 32) On a $s \circ s = 2p \circ (2p - Id) - (2p - Id) = 4(p \circ p - p) + Id$ donc $s \circ s = Id$ équivaut à $p \circ p = p$.
- 33) On a $(s - Id) \circ (s + Id) = 0$ donc $\text{Im}(s + Id) \subset \text{Ker}(s - Id)$ et si $s(\vec{u}) = \vec{u}$ alors $\vec{u} = (s + Id)(\frac{1}{2}\vec{u})$ d'où $\text{Ker}(s - Id) \subset \text{Im}(s + Id)$.
- 34) $\text{rg}(-f) = \text{rg}(2f) = \text{rg } f$.
- 35) On remarque que $\text{Im}(f + g) \subset \text{Im } f + \text{Im } g$ puis que $f = (f + g) + (-g)$.
- 36) D'après le théorème du rang, $\dim(\text{Im } f) = \dim E - \dim(\text{Ker } f)$ d'où si $\text{Ker } f \cap \text{Im } f = \{\vec{0}\}$, $\dim(\text{Ker } f + \text{Im } f) = \dim(\text{Ker } f) + \dim(\text{Im } f) - \dim(\text{Ker } f \cap \text{Im } f) = \dim(E)$.
- 37) $(X - 1, X^2 - 1, \dots, X^n - 1)$ pour $n \geq 1$.
- 38) Si H_1 et H_2 sont distincts, on prouve que $H_1 + H_2 = E$ d'où $\dim(H_1 \cap H_2) = \dim H_1 + \dim H_2 - \dim(H_1 + H_2) = \dim E - 2$.

Problèmes

- 1) 1. $\sin a \sin b = \frac{1}{2} (\cos(a - b) - \cos(a + b))$.
2. $\int_0^{2\pi} \sin px \sin qx \, dx = \begin{cases} 0 & \text{si } p \neq q \\ \pi & \text{si } p = q \end{cases}$.
3. Si $\sum_{p=1}^{p=n} \lambda_p \sin px = 0$ on obtient en multipliant par $\sin qx$ puis en intégrant que $\lambda_q = 0$ pour tout $q \in \llbracket 1; n \rrbracket$.
- 2) 1. La suite nulle appartient à E et E est stable par combinaisons linéaires.
2. On a $r_1 = 1$ et $r_2 = -\frac{1}{2}$.
3. On montre par récurrence que $u_n = \frac{1}{3}(u_0 + 2u_1) + \frac{2}{3}(u_0 - u_1)\left(-\frac{1}{2}\right)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
4. On en déduit $u_n = \frac{2}{3}\left(1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.