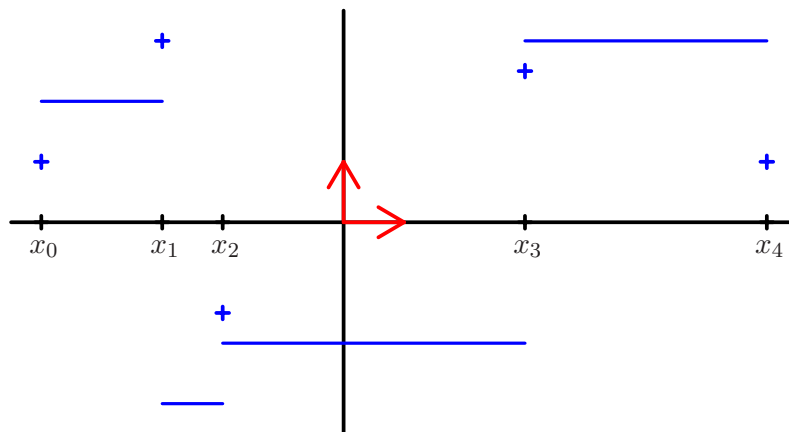


XIV. Intégration

1 Intégrale d'une fonction en escalier

Définition 1. On dit qu'une fonction $\varphi \in \mathcal{F}([a; b], \mathbb{R})$ avec $a \neq b$ est une **fonction en escalier** sur $[a; b]$ s'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ et des réels $x_0, x_1, \dots, x_n$ tels que $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ et φ constante sur $]x_k; x_{k+1}[$ pour tout $k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$.

La famille $(x_k)_{0 \leq k \leq n}$ est appelée une **subdivision** adaptée à la fonction φ , on note $\mathcal{E}([a; b], \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions en escalier sur $[a; b]$.



Remarque 1. Une fonction en escalier n'est pas nécessairement continue à gauche ou à droite en x_k .

Exercice 1. Montrer que la fonction partie entière est une fonction en escalier sur l'intervalle $[-2; 2]$.

Propriété 1. $\mathcal{E}([a; b], \mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}([a; b], \mathbb{R})$.

Démonstration. Exigible - On construit une subdivision adaptée aux deux fonctions considérées. $\square$

Définition 2. On considère $\varphi \in \mathcal{E}([a; b], \mathbb{R})$ avec $(x_k)_{0 \leq k \leq n}$ une subdivision de φ et $\varphi(x) = y_k$ pour tout $x \in]x_k; x_{k+1}[$.

On appelle **intégrale** de la fonction φ sur l'intervalle $[a; b]$,
$$\int_{[a; b]} \varphi = \sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1} - x_k) y_k.$$

Remarque 2. L'intégrale d'une fonction en escalier correspond à la somme des aires algébriques des « marches ».

Remarque 3. L'intégrale d'une fonction en escalier est indépendante de la subdivision considérée.

Propriété 2. Croissance de l'intégrale

On considère $\varphi, \psi \in \mathcal{E}([a; b], \mathbb{R})$, si $\varphi \leq \psi$ sur $[a; b]$, alors
$$\int_{[a; b]} \varphi \leq \int_{[a; b]} \psi.$$

Démonstration. Exigible - On considère une subdivision adaptée à φ et ψ . $\square$

Remarque 4. On en déduit que l'intégrale d'une fonction en escalier positive est positive.

Propriété 3. Inégalité triangulaire

On considère $\varphi \in \mathcal{E}([a; b], \mathbb{R})$, alors $\left| \int_{[a; b]} \varphi \right| \leq \int_{[a; b]} |\varphi|$.

Démonstration. Exigible - On remarque que $\varphi \leq |\varphi|$. □

Propriété 4. Linéarité de l'intégrale

On considère $\varphi, \psi \in \mathcal{E}([a; b], \mathbb{R})$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, alors $\int_{[a; b]} \lambda\varphi + \mu\psi = \lambda \int_{[a; b]} \varphi + \mu \int_{[a; b]} \psi$.

Démonstration. Exigible - On considère une subdivision adaptée à φ et ψ . □

Propriété 5. Relation de Chasles

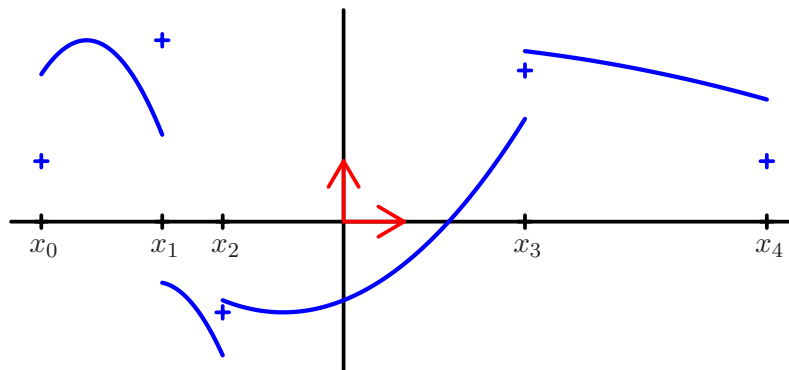
On considère $\varphi \in \mathcal{E}([a; c], \mathbb{R})$ et $b \in]a; c[$, alors φ est en escalier sur $[a; b]$ et $[b; c]$ et $\int_{[a; c]} \varphi = \int_{[a; b]} \varphi + \int_{[b; c]} \varphi$.

Démonstration. Exigible - On construit une subdivision adaptée. □

2 Intégrale d'une fonction continue par morceaux

Définition 3. On dit qu'une fonction $f \in \mathcal{F}([a; b], \mathbb{R})$ avec $a \neq b$ est une **fonction continue par morceaux** sur $[a; b]$ s'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ et des réels $x_0, x_1, \dots, x_n$ tels que $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ et f continue sur $]x_k; x_{k+1}[$ et prolongeable par continuité à droite en x_k et à gauche en x_{k+1} pour tout $k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$.

La famille $(x_k)_{0 \leq k \leq n}$ est appelée une **subdivision** adaptée à la fonction f , on note $\mathcal{C}_m([a; b], \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues par morceaux sur $[a; b]$.



Exercice 2. Représenter graphiquement la fonction $f : [-1; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ et montrer qu'elle est continue par morceaux.

$$x \mapsto \begin{cases} x+1 & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ x^2 - 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Propriété 6. $\mathcal{C}_m([a; b], \mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}([a; b], \mathbb{R})$.

Démonstration. Exigible - On construit une subdivision adaptée aux deux fonctions considérées. □

Propriété 7. On considère $f \in \mathcal{C}_m([a; b], \mathbb{R})$ alors pour tout $\epsilon > 0$ il existe $\varphi, \psi \in \mathcal{E}([a; b], \mathbb{R})$ telles que $\varphi \leq f \leq \psi$ et $\psi - \varphi \leq \epsilon$ sur $[a; b]$.

Démonstration. Hors-programme. □

Exercice 3. On considère la fonction f de l'exercice 2, déterminer deux fonctions φ et ψ vérifiant les conditions de la propriété 7 pour $\epsilon = 1$.

Propriété 8. On considère une fonction $f \in \mathcal{C}_m([a; b], \mathbb{R})$ alors $\left\{ \int_{[a; b]} \varphi / \varphi \in \mathcal{E}([a; b], \mathbb{R}) \text{ et } \varphi \leq f \right\}$ et $\left\{ \int_{[a; b]} \psi / \psi \in \mathcal{E}([a; b], \mathbb{R}) \text{ et } f \leq \psi \right\}$ admettent respectivement une borne supérieure et une borne inférieure égales, on appelle ce nombre **intégrale** de la fonction f sur l'intervalle $[a; b]$ notée $\int_{[a; b]} f$.

Démonstration. Hors-programme - On utilise le fait que f est bornée. $\square$

On admet que l'**intégrale d'une fonction continue par morceaux** est également **croissante** et **linéaire** et qu'elle vérifie l'**inégalité triangulaire** ainsi que la **relation de Chasles**.

Propriété 9. Inégalité de la moyenne

On considère $f, g \in \mathcal{C}_m([a; b], \mathbb{R})$ alors $\left| \int_{[a; b]} f \right| \leq (b - a) \sup_{[a; b]} |f|$ et $\left| \int_{[a; b]} fg \right| \leq \sup_{[a; b]} |f| \int_{[a; b]} |g|$.

Démonstration. Exigible - On utilise l'inégalité triangulaire et la croissance de l'intégrale. $\square$

Définition 4. On appelle **valeur moyenne** d'une fonction $f \in \mathcal{C}_m([a; b], \mathbb{R})$ le nombre réel $\frac{1}{b - a} \int_{[a; b]} f$.

Exercice 4. Montrer que $\frac{1}{b - a} \int_{[a; b]} f \in [\inf_{[a; b]} f; \sup_{[a; b]} f]$.

Exercice 5. Déterminer la valeur moyenne de la fonction carré sur l'intervalle $[0; 1]$.

Propriété 10. Une fonction $f \in \mathcal{C}([a; b], \mathbb{R})$ positive est nulle si et seulement si son intégrale sur l'intervalle $[a; b]$ est nulle.

Démonstration. Exigible - On procède par l'absurde en montrant par continuité de f que si $f(c) \neq 0$ alors il existe un intervalle $]c - \delta; c + \delta[$ sur lequel $f \geq \frac{1}{2}f(c)$. $\square$

Contre-exemple 1. Donner un exemple de fonction continue par morceaux positive non nulle dont l'intégrale est nulle.

On peut également définir la notion de fonction à valeurs complexes continue par morceaux, l'intégrale d'une fonction continue par morceaux à valeurs complexes ne se définit plus en termes d'aires mais par la formule $\int_{[a; b]} f = \int_{[a; b]} \operatorname{Re} f + i \int_{[a; b]} \operatorname{Im} f$, elle vérifie la propriété de linéarité ainsi que la relation de Chasles.

Exercice 6. On considère une fonction $f \in \mathcal{C}_m(I, \mathbb{C})$ et on pose $g = \operatorname{Re} f \int_I \operatorname{Re} f + \operatorname{Im} f \int_I \operatorname{Im} f$.

1. Montrer que $\int_I g = \left| \int_I f \right|^2$
2. Montrer que $g \leq \int_I |f|^2$. (on pourra utiliser l'inégalité $\operatorname{Re}(z) \leq |z|$ pour $z \in \mathbb{C}$)
3. En déduire que $\left| \int_I f \right| \leq \int_I |f|$.

Exercice 7. Montrer que l'intégrale d'une fonction continue par morceaux à valeurs complexes vérifie l'inégalité de la moyenne.

3 Primitives et intégrale d'une fonction continue

Définition 5. On considère une fonction $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$, une fonction $F \in \mathcal{D}(I, \mathbb{R})$ telle que $F' = f$ est appelée une **primitive** de la fonction f sur l'intervalle I .

Exercice 8. Montrer que la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ n'admet pas de primitive sur $\mathbb{R}$.

$$x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ 0 & \text{si } x \neq 0 \end{cases}$$

Propriété 11. Si F_1 et F_2 sont deux primitives d'une fonction $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ alors il existe un réel k tel que $F_2 = F_1 + k$.

Démonstration. Exigible - On applique l'égalité des accroissements finis à la fonction $F_2 - F_1$. □

Définition 6. On considère $f \in \mathcal{C}_m(I, \mathbb{R})$ alors pour tous $a, b \in I$ on note :

$$\int_a^b f(t)dt = \begin{cases} 0 & \text{si } a = b \\ \int_{[a;b]} f & \text{si } a < b \\ -\int_{[b;a]} f & \text{si } a > b \end{cases}$$

Remarque 5. $\int_b^a f(t)dt = -\int_a^b f(t)dt$.

Propriété 12. Relation de Chasles

On considère $f \in \mathcal{C}_m(I, \mathbb{R})$ alors pour tous $a, b, c \in I$ on a $\int_a^b f(t)dt + \int_b^c f(t)dt = \int_a^c f(t)dt$.

Démonstration. Exigible. □

Remarque 6. La croissance de l'intégrale n'est plus vérifiée lorsque les bornes ne sont pas dans le bon ordre.

Théorème 1. Théorème fondamental de l'analyse

On considère une fonction $f \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ et $x_0, a, b \in I$:

- La fonction $F : x \mapsto \int_{x_0}^x f(t)dt$ est une primitive de f sur I s'annulant en x_0 .
- Si F est une primitive de f sur I alors $\int_a^b f(t)dt = [F(t)]_{t=a}^{t=b} = F(b) - F(a)$.

Démonstration. Exigible - On utilise le taux d'accroissement et l'inégalité de la moyenne. □

Exercice 9. Calculer l'aire du domaine plan délimité par l'axe des abscisses, la courbe représentative de la fonction inverse ainsi que les droites d'équation $x = 1$ et $x = 2$.

Corollaire 1. Si $f \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$ et $a, b \in I$ alors $\int_a^b f'(t)dt = f(b) - f(a)$.

Démonstration. Exigible. □

Propriété 13. Intégration par parties

Si $u, v \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$ et $a, b \in I$ alors $\int_a^b u'(t)v(t)dt = [u(t)v(t)]_{t=a}^{t=b} - \int_a^b u(t)v'(t)dt$.

Démonstration. Exigible. □

Exercice 10. Calculer $\int_0^{\frac{\pi}{2}} t \sin t \, dt$.

Exercice 11. Déterminer une primitive de la fonction $x \mapsto xe^x$ sur $\mathbb{R}$.

Propriété 14. Changement de variable

Si $f \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$, $\varphi \in \mathcal{C}^1(J, \mathbb{R})$ et $\begin{matrix} a, b \in J \\ \varphi(a), \varphi(b) \in I \end{matrix}$ alors $\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)dx = \int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$.

Démonstration. Exigible - On considère la fonction $F \circ \varphi$ où F est une primitive de f . □

Remarque 7. En pratique, on note $x = \varphi(t)$ et $dx = \varphi'(t)dt$.

Exercice 12. Calculer $\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} \, dx$ puis interpréter graphiquement. (on pourra utiliser le changement de variable $x = \cos t$)

Exercice 13. Calculer $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^2 (\sin t)^3 \, dt$. (on pourra utiliser le changement de variable $x = \cos t$)

Corollaire 2. On considère $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $a, b \in \mathbb{R}$:

- si f est impaire alors $\int_{-a}^a f(t)dt = 0$.
- si f est paire alors $\int_{-a}^a f(t)dt = 2 \int_0^a f(t)dt$.
- si f est T -périodique alors $\int_{a+T}^{b+T} f(t)dt = \int_a^b f(t)dt$.

Démonstration. Exigible. □

Exercice 14. Calculer $\int_0^\pi (\cos t)^3 \, dt$. (on pourra utiliser le changement de variable $t = \pi - x$)

Exercice 15. On considère $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ T -périodique avec $a \in \mathbb{R}$, montrer que $\int_a^{a+T} f(t)dt = \int_0^T f(t)dt$.
(on pourra utiliser la relation de Chasles)

4 Développement limités

4.1 Formules de Taylor

Propriété 15. Formule de Taylor-Lagrange avec reste intégral

On considère $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I, \mathbb{R})$ et $a, b \in I$ alors :

$$f(b) = \sum_{k=0}^{k=n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k + \int_a^b \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} (b-t)^n dt$$

Démonstration. Exigible - On procède par récurrence et on utilise une intégration par parties. □

Corollaire 3. Inégalité de Taylor-Lagrange

On considère $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I, \mathbb{R})$ et $a, b \in I$ alors :

$$\left| f(b) - \sum_{k=0}^{k=n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k \right| \leq \frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!} \sup_{[a;b]} |f^{(n+1)}|$$

Démonstration. Exigible. □

Exercice 16. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sum_{k=0}^{k=n} \frac{x^k}{k!} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^x$.

Corollaire 4. Formule de Taylor-Young

On considère $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I, \mathbb{R})$ et $a, x \in I$ alors :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{k=n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + o((x-a)^n)$$

Démonstration. Exigible. □

Exercice 17. Étudier la limite en zéro de la fonction $x \mapsto \frac{1 - \cos x}{x^2}$.

En fait, on peut énoncer une version plus forte de la propriété :

Propriété 16. Formule de Taylor-Young

On considère $f \in \mathcal{C}^n(I, \mathbb{R})$ et $a, x \in I$ alors :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{k=n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + o((x-a)^n)$$

Démonstration. Exigible - Pour l'hérédité, on applique la formule à la fonction f' puis on intègre. □

Propriété 17. Développements limités usuels

$$\begin{aligned} e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n) \\ \operatorname{ch} x &= 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}) \\ \operatorname{sh} x &= x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2}) \\ \cos x &= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}) \\ \sin x &= x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2}) \\ (1+x)^\alpha &= 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{6} x^3 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + o(x^n) \end{aligned}$$

Démonstration. Exigible. □

4.2 Opérations sur les développements limités

Définition 7. On dit qu'une fonction f à valeurs réelles définie au voisinage de a admet un **développement limité** d'ordre $n \in \mathbb{N}$ en a si $f(x) =_a c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \dots + c_n(x-a)^n + o((x-a)^n)$ avec $c_0, c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$.

Propriété 18. Si une fonction f admet un développement limité d'ordre n en a alors celui-ci est unique.

Démonstration. Exigible - On remarque que $c_0 = \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$, $c_1 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - c_0}{x - a} \dots$ □

Exercice 18. Interpréter en termes de limites les coefficients du développement limité d'ordre n en 0 de la fonction $x \mapsto \frac{1}{1-x}$.

On peut additionner et multiplier les développements limités :

Exercice 19. Calculer le développement limité d'ordre 4 en 0 des fonctions $x \mapsto \cos x + \sin x$ et $x \mapsto e^x \sin x$.

On peut déterminer le développement limité d'une composée :

Exercice 20. Calculer le développement limité d'ordre 3 en 0 des fonctions $x \mapsto e^{\sin x}$ et $x \mapsto e^{\cos x}$.

On peut déterminer le développement limité d'un inverse ou d'un quotient en utilisant le développement limité de $u \mapsto \frac{1}{1-u}$ en 0 :

Exercice 21. Déterminer le développement limité d'ordre 5 en 0 de la fonction $x \mapsto \frac{1}{\cos x}$, en déduire le développement limité d'ordre 5 en 0 de la fonction tangente.

Propriété 19. Développement limité d'une primitive

On considère une fonction f définie sur un intervalle I et admettant une primitive F sur I telle que $f(x) =_a o((x-a)^n)$ avec $a \in I$ alors $F(x) =_a F(a) + o((x-a)^{n+1})$.

Démonstration. Non exigible - On applique l'égalité des accroissements finis à la fonction F . □

Exercice 22. Déterminer le développement limité d'ordre n en 0 de la fonction $x \mapsto \ln(1-x)$.

Contre-exemple 2. On considère la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

$$x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ x^3 \sin \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \end{cases}$$

1. Montrer que $f(x) =_0 o(x^2)$.
2. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
3. Montrer que $f'(x) \neq_0 o(x)$.

Si f est dérivable et admet un développement limité d'ordre n en a on ne peut donc pas affirmer que f' admet un développement limité d'ordre $n-1$ en a , en revanche si on sait que f' admet un développement limité d'ordre $n-1$ en a alors on peut l'obtenir par dérivation du développement limité d'ordre n de f en a d'après la propriété 19.