I. Pratique calculatoire

Exercice 1

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\dfrac{x^2+x}{x^2-2} \leqslant 0$.

Exercice 2

Résoudre graphiquement le système $\left\{\begin{array}{rcl} 2x-y+1 & > & 0 \\ x-2 & < & 0 \\ x+2y+2 & > & 0 \end{array}\right.$.

Exercice 3

Résoudre dans $\mathbb{R}$ graphiquement puis par le calcul l'équation $|x-1|+|x+2|=3$.

Exercice 4

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $|x+1|+|x-1| \leqslant x+2$.

Exercice 5

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $5x^2+\dfrac{2}{3}x-1=0$.

Exercice 6

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $x^2 < x+2$.

Exercice 7

Déterminer l'ensemble de définition de la fonction $f : x \mapsto \ln(x^2-x)$ puis étudier ses variations.

Exercice 8

Déterminer la valeur de $m \in \mathbb{R}$ pour que l'équation $-3x^2+6x-4m=0$ admette une unique solution et la calculer dans ce cas.

Exercice 9

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\dfrac{x^2-2x-3}{x^2+x-2} \geqslant 0$.

Exercice 10

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\dfrac{x-1}{2x} > \dfrac{x+5}{2-x}$.

Exercice 11

Résoudre le système $\left\{ \begin{array}{ccc} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y} & = & \dfrac{4}{15} \\ xy & = & 60 \end{array} \right.$.

Exercice 12

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $9x^3+12x^2+x-2=0$.

Exercice 13

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\dfrac{x^2+3x-4}{x-1} \leqslant \dfrac{77}{x}$.

Exercice 14

Déterminer $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \dfrac{\sqrt{x+1}}{\sin x}$, $\lim\limits_{x\to 1} e^{-(\ln x)^2}$, $\lim\limits_{x\to -\infty} \ln(\sqrt{x^2+1}-x)$ et $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

Exercice 15

Déterminer $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{2x^2-1}{3x+1}$, $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{1}{x-\sqrt{x}}$, $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-3x+2}{x^2-1}$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} (\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2+2})$.

Exercice 16

Déterminer $\lim\limits_{x\to 0} xe^{-\frac{1}{x^2}}$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln(x^2+1)}{x}$.

Exercice 17

Déterminer $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x-1}{x}$ et $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x}$.

Exercice 18

Déterminer les dérivées des fonctions $f_1 : x \mapsto \dfrac{x+2}{x^2+1}$, $f_2 : x \mapsto xe^{x^2-1}$ et $f_3 : x \mapsto x(x+1)^2$.

Exercice 19

Déterminer les dérivées des fonctions $f_1 : x \mapsto x\sqrt{x^2+2}$, $f_2 : x \mapsto \dfrac{\sin x}{\ln x}$ et $f_3 : x \mapsto (\sin x - \cos x)e^x$.

Exercice 20

Déterminer les primitives des fonctions $f_1 : x \mapsto 2x^2 - x + 7$, $f_2 : x \mapsto x^2(x^3+1)^3$ et $f_3 : x \mapsto \dfrac{x}{(x^2+3)^2}$.

Exercice 21

Déterminer les primitives des fonctions $f_1 : x \mapsto x\sqrt{x}$, $f_2 : x \mapsto \sin x \cos x$ et $f_3 : x \mapsto \dfrac{x}{x^2+1}$.

Exercice 22

Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{k=n}(2k+1)$ et $\displaystyle\prod_{k=0}^{k=n} 2^k$.

Exercice 23

Calculer $\displaystyle\prod_{k=1}^{k=n} \frac{k}{k+1}$.

Exercice 24

Calculer $\dfrac{15!}{7!\ 9!}$.

Exercice 25

Simplifier $\dfrac{(2n+1)!}{(2n-1)!} - 2\dfrac{(n+1)!}{(n-1)!}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

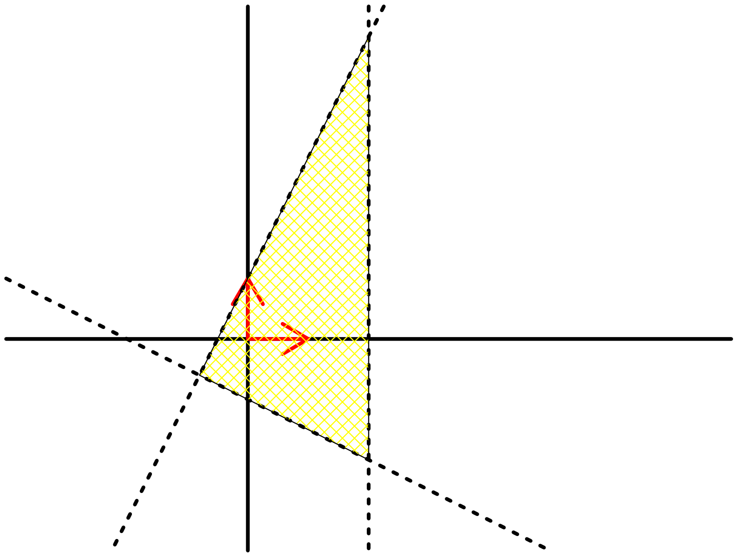
Exercice 26

En utilisant la formule du binôme, montrer que pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0; +\infty[$, $(1+x)^n \geqslant 1 + nx$.

Réponses

1) L'ensemble des solutions est $]-\sqrt{2};-1]\cup[0;\sqrt{2}[$.

2)



3) L'ensemble des solutions est l'intervalle $[-2;1]$.

4) L'ensemble des solutions est l'intervalle $[0;2]$.

5) Les solutions sont $\frac{-1-\sqrt{46}}{15}$ et $\frac{-1+\sqrt{46}}{15}$.

6) L'ensemble des solutions est l'intervalle $]-1;2[$.

7)

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
f	$+\infty$	$\searrow$	$-\infty$ ||	(grisé)	|| $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

8) Pour $m=\frac{3}{4}$, l'équation admet pour unique solution $x=1$.

9) L'ensemble des solutions est $]-\infty;-2[\cup[-1;1[\cup[3;+\infty[$.

10) L'ensemble des solutions est $]-\infty;-2[\cup]-\frac{1}{3};0[\cup]2;+\infty[$.

11) Les solutions du système sont les couples $(x_1=6;y_1=10)$ et $(x_2=10;y_2=6)$.

12) Les solutions sont -1, $\frac{1}{3}$ et $-\frac{2}{3}$.

13) L'ensemble des solutions est $]-\infty;-11]\cup]0;1[\cup]1;7]$.

14) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x<0}}\dfrac{\sqrt{x+1}}{\sin x}=-\infty$, $\lim\limits_{x\to 1}e^{-(\ln x)^2}=1$, $\lim\limits_{x\to-\infty}\ln(\sqrt{x^2+1}-x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0}x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)=0$.

15) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^2-1}{3x+1}=-\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x-\sqrt{x}}=0$, $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-1}=-\dfrac{1}{2}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2+2})=0$.

16) $\lim\limits_{x\to 0}xe^{-\frac{1}{x^2}}=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x^2+1)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2\dfrac{\ln x}{x}+\dfrac{\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{x}\right)=0$.

17) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=1$ et $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=1$.

18) $f_1'(x)=\dfrac{-x^2-4x+1}{(x^2+1)^2}$, $f_2'(x)=(2x^2+1)e^{x^2-1}$ et $f_3'(x)=(3x+1)(x+1)$.

19) $f_1'(x) = \dfrac{2(x^2+1)}{\sqrt{x^2+2}}$, $f_2'(x) = \dfrac{x\cos x \ln x - \sin x}{x(\ln x)^2}$ et $f_3'(x) = 2e^x \sin x$.

20) $F_1(x) = \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 7x + k$, $F_2(x) = \frac{1}{12}(x^3+1)^4 + k$ et $F_3(x) = -\frac{1}{2(x^2+1)} + k$.

21) $F_1(x) = \frac{2}{5}x^2\sqrt{x} + k$, $F_2(x) = \frac{1}{2}(\sin x)^2 + k$ et $F_3(x) = \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + k$.

22) $\displaystyle\sum_{k=0}^{k=n}(2k+1) = (n+1)^2$ et $\displaystyle\prod_{k=0}^{k=n} 2^k = 2^{\frac{n(n+1)}{2}}$.

23) $\displaystyle\prod_{k=1}^{k=n} \frac{k}{k+1} = \frac{1}{n+1}$.

24) $\dfrac{15!}{7!\ 9!} = 715$.

25) $\dfrac{(2n+1)!}{(2n-1)!} - 2\dfrac{(n+1)!}{(n-1)!} = 2n^2$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

26) On minore $(1+x)^n$ par les deux premiers termes de son développement suivant la formule du binôme, les autres termes étant positifs.