III. Fonctions

Exercice 1

Déterminer le meilleur encadrement possible de $2x^2+1$ pour $-3 \leqslant x \leqslant 5$.

Exercice 2

On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{2x^2-7x+8}{x-2}$. Déterminer son ensemble de définition, déterminer ses limites aux bornes de cet ensemble, étudier ses variations puis tracer sa courbe représentative dans un repère orthonormal en faisant figurer ses tangentes horizontales.

Exercice 3

Représenter graphiquement la fonction *partie fractionnaire* : $x \mapsto x - \lfloor x \rfloor$.

Exercice 4

Résoudre l'équation $\lfloor 2x \rfloor = 2\lfloor x \rfloor$.

Exercice 5

Simplifier l'expression $\dfrac{e^x+1}{e^{x-1}} - e$.

Exercice 6

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $3e^x - e^{2x} \geqslant 2$.

Exercice 7

Étudier les variations de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = xe^{1-x^2}$.

Exercice 8

Étudier les variations de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 10xe^{-\frac{(x+1)^2}{4}}$ puis tracer sa courbe représentative dans un repère orthonormal.

Exercice 9

Étudier les variations de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$

Exercice 10

Démontrer l'encadrement $x - \frac{1}{2}x^2 \leqslant \ln(1+x) \leqslant x$ pour $x \geqslant 0$, en déduire la limite en 0_+ de la fonction $x \mapsto \dfrac{\ln(1+x)}{x}$.

Exercice 11

Démontrer que pour x et y deux nombres réels strictement positifs on a $\dfrac{\ln x + \ln y}{2} \leqslant \ln\left(\dfrac{x+y}{2}\right)$.

Exercice 12

Résoudre l'équation $x^{\sqrt{x}} = \sqrt{x}^x$.

Exercice 13

Démontrer que $\ln x \leqslant x - 1$ pour $x > 0$, en déduire que $\pi^e \leqslant e^\pi$.

Exercice 14

Étudier la limite en $+\infty$ de la fonction $x \mapsto (x + 2^x)^{\frac{1}{x}}$.

Exercice 15

Étudier sur l'intervalle $[0; 2\pi]$ les variations de la fonction f définie par $f(x) = x - 2\sin x$.

Exercice 16

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\sin x + \cos x = \sqrt{\dfrac{3}{2}}$.

Exercice 17

Résoudre l'équation $\arcsin x = \arccos\dfrac{1}{4} - \arccos\dfrac{1}{3}$.

Exercice 18

Démontrer que $\arcsin x + \arccos x = \dfrac{\pi}{2}$ pour $x \in [-1; 1]$.

Exercice 19

Simplifier $\arctan x + \arctan\dfrac{1}{x}$ pour $x \in \mathbb{R}^*$.

Exercice 20

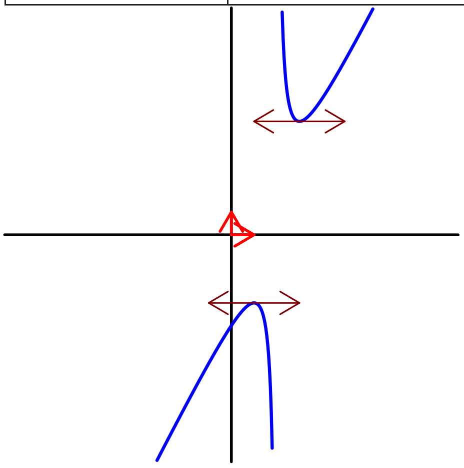
Montrer que la fonction $x \mapsto x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x$ est dérivable sur l'intervalle $]-1; 1[$ puis calculer sa dérivée. En déduire la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$ et retrouver ce résultat géométriquement.

Réponses

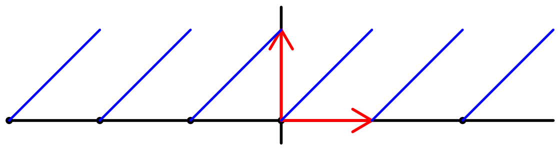
1) Pour $-3 \leqslant x \leqslant 5$ on a $1 \leqslant 2x^2+1 \leqslant 51$.

2)

x	$-\infty$		-1		2		3		$+\infty$
variations de f			-3		‖ $+\infty$				$+\infty$
		$\nearrow$		$\searrow$	‖	$\searrow$		$\nearrow$	
	$-\infty$			$-\infty$	‖		5		



3)



4) Les solutions sont les réels x tels que $x - \lfloor x \rfloor < \frac{1}{2}$.

5) On a $\dfrac{e^x+1}{e^{x-1}} - e = e^{1-x}$.

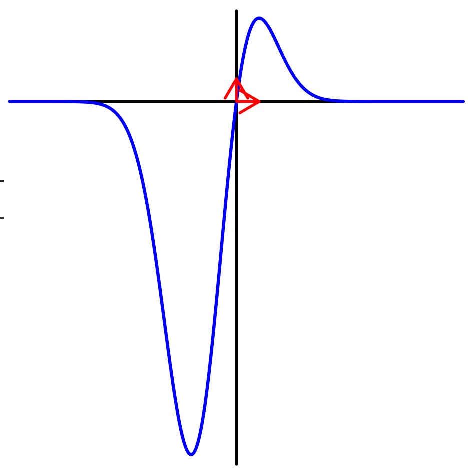
6) On a $0 \leqslant x \leqslant \ln 2$ en posant $X = e^x$.

7)

x	$-\infty$		$-\frac{\sqrt{2}}{2}$		$\frac{\sqrt{2}}{2}$		$+\infty$
variations de f	0				$\sqrt{\frac{e}{2}}$		
		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	
			$-\sqrt{\frac{e}{2}}$				0

8)

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
signe de f'		$-$	0	$+$	0	$-$	
variations de f	0				$\frac{10}{e}$		
		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	
			$-20e^{-\frac{1}{4}}$				0



9) f est décroissante sur $\mathbb{R}_-$ et croissante sur $\mathbb{R}_+$.

10) On étudie les fonctions $x \mapsto x - \ln(1+x)$ et $x \mapsto \ln(1+x) - x + \frac{1}{2}x^2$ sur l'intervalle $[0;+\infty[$. On en déduit $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$.

11) On étudie les variations de la fonction $x \mapsto \ln\left(\dfrac{x+y}{2}\right) - \dfrac{\ln x + \ln y}{2}$.

12) On a $S = \{1; 4\}$.

13) On étudie les variations de la fonction $x \mapsto x - 1 - \ln x$ sur l'intervalle $]0; +\infty[$ puis on utilise l'inégalité avec $x = \dfrac{\pi}{e}$.

14) On a $\lim\limits_{x \to +\infty} (x + 2^x)^{\frac{1}{x}} = 2$.

15)

<table>
<tr><td>x</td><td>0</td><td>$\frac{\pi}{3}$</td><td>$\frac{5\pi}{3}$</td><td>2π</td></tr>
<tr><td>variations de f</td><td>0 $\searrow$</td><td>$\frac{\pi}{3} - \sqrt{3}$ $\nearrow$</td><td>$\frac{5\pi}{3} + \sqrt{3}$ $\searrow$</td><td>2π</td></tr>
</table>

16) On a $x = \dfrac{\pi}{12} + 2k\pi$ ou $x = \dfrac{5\pi}{12} + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$ en élevant l'équation au carré et en éliminant les solutions de l'équation $\sin x + \cos x = -\sqrt{\dfrac{3}{2}}$.

17) On a $x = \dfrac{\sqrt{15} - 2\sqrt{2}}{12}$.

18) On a $\arctan x + \arctan \dfrac{1}{x} = \dfrac{\pi}{2}$ si $x > 0$ et $\arctan x + \arctan \dfrac{1}{x} = -\dfrac{\pi}{2}$ si $x < 0$.

19) On a $\displaystyle\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \sqrt{1 - x^2}\, \mathrm{d}x = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\pi}{6}$.