

V. Équations différentielles

1 Primitive d'une fonction

Définition 1. On appelle **primitive** d'une fonction f une solution de l'équation différentielle $y' = f$.

Exercice 1. Déterminer une solution de l'équation différentielle $y'(t) = 2t^3 - 2t + 5$ d'inconnue y de la variable t .

Remarque 1. On notera parfois abusivement $y' = 2t^3 - 2t + 5$ au lieu de $y'(t) = 2t^3 - 2t + 5$.

Lorsque nous aurons défini la notion de **continuité** et développé la théorie de l'**intégration**, nous pourrons démontrer le théorème suivant :

Théorème 1. Toute fonction f continue admet des primitives, si F_1 et F_2 sont deux primitives de la fonction f alors il existe une constante $k \in \mathbb{R}$ telle que $F_2 = F_1 + k$, si F est une primitive de la fonction f alors $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$.

Exercice 2. Déterminer les primitives de la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(t) = \frac{1}{t^2 + 1}$.

Exercice 3. Montrer que la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(t) = \frac{t}{t^2 + 1}$ admet une unique primitive F telle que $F(1) = 1$. Exprimer $F(t)$.

Exercice 4. Écrire sous forme intégrale l'unique primitive F s'annulant en 1 de la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(t) = e^{-t^2}$.

2 Équations linéaires du premier ordre

Rappelons tout d'abord que nous avons défini la fonction exponentielle à partir d'une équation différentielle du premier ordre :

Définition 2. L'équation différentielle $y' = y$ avec la condition initiale $y(0) = 1$ admet une unique solution sur \mathbb{R} , on l'appelle **fonction exponentielle** et on la note $t \mapsto \exp(t)$ ou $t \mapsto e^t$ avec $e = \exp(1)$.

La fonction exponentielle va donc jouer un rôle fondamental dans la résolution des équations différentielles.

2.1 Équations linéaires du premier ordre sans second membre

Théorème 2. On considère une fonction a continue sur un intervalle I à valeurs dans \mathbb{R} ou \mathbb{C} , alors l'équation différentielle $y' + a(t)y = 0$ admet pour solutions les fonctions y définies par $y(t) = \lambda e^{-A(t)}$ où A est une primitive de a et λ un nombre réel ou complexe.

Démonstration. Exigible - On remarque que $y'(t) + a(t)y(t) = 0 \iff y'(t)e^{A(t)} + y(t)A'(t)e^{A(t)} = 0$. \square

Exercice 5. Résoudre les équations différentielles suivantes :

- $y' - 2y = 0$
- $y' + (1 + it)y = 0$
- $(t^2 + 1)y' + y = 0$

Propriété 1. On considère une fonction a continue sur un intervalle I à valeurs dans \mathbb{R} ou \mathbb{C} , alors l'équation différentielle $y' + a(t)y = 0$ avec la **condition initiale** $y(t_0) = \alpha$ admet une unique solution.

Démonstration. Exigible. □

Exercice 6. Résoudre l'équation différentielle $y' - \sqrt{t}y = 0$ avec la condition initiale $y(1) = e$.

Exercice 7. Si on impose une condition initiale sur y' , l'équation différentielle $y' + a(t)y = 0$ admet-elle une unique solution ?

2.2 Équations linéaires du premier ordre avec second membre

La première méthode de résolution appelée **méthode de variation de la constante** consiste à chercher une solution de l'équation avec second membre sous une forme modifiée de la solution de l'équation sans second membre en remplaçant la constante multiplicative par une fonction :

Propriété 2. On considère deux fonctions a et b continues sur un intervalle I à valeurs dans \mathbb{R} ou \mathbb{C} , alors l'équation différentielle $y' + a(t)y = b(t)$ admet pour solutions les fonctions y définies par $y(t) = f(t)e^{-A(t)}$ où A est une primitive de a et f une primitive de la fonction be^A .

Démonstration. Non exigible - On pose $y(t) = f(t)e^{-A(t)}$ et on montre que $f' = be^A$. □

Exercice 8. Résoudre l'équation différentielle $y' + \frac{1}{t}y = t$ sur l'intervalle $]0; +\infty[$ puis sur l'intervalle $] - \infty; 0[$ en utilisant la méthode de variation de la constante.

La seconde méthode de résolution appelée **méthode de la solution particulière** consiste à chercher une solution particulière de l'équation avec second membre ce qui permet ensuite de se ramener à une équation sans second membre :

Théorème 3. On considère deux fonctions a et b continues sur un intervalle I à valeurs dans \mathbb{R} ou \mathbb{C} , alors l'équation différentielle $y' + a(t)y = b(t)$ admet pour solutions les fonctions y définies par $y(t) = \tilde{y}(t) + y_H(t)$ où \tilde{y} est une solution particulière de l'équation différentielle et y_H une solution de l'équation différentielle sans second membre associée.

Démonstration. Exigible - On remarque que l'équation différentielle admet une solution \tilde{y} et on montre que $f = y - \tilde{y}$ est solution de l'équation différentielle sans second membre associée. □

Exercice 9. Résoudre l'équation différentielle $y' + \frac{1}{t}y = t$ sur l'intervalle $]0; +\infty[$ puis sur l'intervalle $] - \infty; 0[$ en cherchant une solution particulière sous la forme d'une fonction trinôme du second degré.

Propriété 3. On considère deux fonctions a et b continues sur un intervalle I à valeurs dans \mathbb{R} ou \mathbb{C} , alors l'équation différentielle $y' + a(t)y = b(t)$ avec la condition initiale $y(t_0) = \alpha$ admet une unique solution.

Démonstration. Non exigible. □

Exercice 10. Résoudre l'équation différentielle $y' + y = e^t$ avec la condition initiale $y(0) = 1$.

Le **principe de superposition** peut être utile lors de la recherche d'une solution particulière :

Propriété 4. On considère trois fonctions a , b_1 et b_2 continues sur un intervalle I à valeurs dans \mathbb{R} ou \mathbb{C} . Si y_1 est une solution de l'équation différentielle $y' + ay = b_1$ et y_2 une solution de l'équation différentielle $y' + ay = b_2$ alors $y_1 + y_2$ est une solution de l'équation différentielle $y' + ay = b_1 + b_2$.

Démonstration. Exigible. □

Exercice 11. Déterminer une solution particulière de l'équation différentielle $y' - y = 2 \cos t$ en utilisant les formules d'Euler ainsi que le principe de superposition.

3 Équations linéaires du second ordre à coefficients constants

3.1 Équations linéaires du second ordre à coefficients constants sans second membre

Théorème 4. On considère trois nombres a , b et c réels ou complexes avec $a \neq 0$ et on note $\Delta = b^2 - 4ac$, alors l'équation différentielle $ay'' + by' + cy = 0$ admet pour solutions les fonctions y définies par :

- Si $\Delta \neq 0$, $y(t) = \lambda e^{r_1 t} + \mu e^{r_2 t}$ avec λ et μ des nombres réels ou complexes et r_1, r_2 les solutions de l'équation $ar^2 + br + c = 0$.
- Si $\Delta = 0$, $y(t) = (\lambda + \mu t)e^{r_0 t}$ avec λ et μ des nombres réels ou complexes et r_0 la solution double de l'équation $ar^2 + br + c = 0$.

Démonstration. Non exigible - On pose $y(t) = f(t)e^{rt}$ avec r une solution de l'équation $ar^2 + br + c = 0$ et on montre que f' est solution d'une équation différentielle linéaire du premier ordre que l'on résout. □

Définition 3. L'équation du second degré associée à une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants est appelée **équation caractéristique**.

Exercice 12. Résoudre les équations différentielles suivantes :

- $y'' - 3y' + 2y = 0$
- $y'' + 2y' + y = 0$
- $y'' + 2iy' - 2y = 0$

Propriété 5. On considère trois nombres a , b et c réels ou complexes avec $a \neq 0$, alors l'équation différentielle $ay'' + by' + c = 0$ avec la condition initiale $y(t_0) = \alpha$ et $y'(t_0) = \beta$ admet une unique solution.

Démonstration. Non exigible - On montre que λ et μ sont solutions d'un système linéaire de déterminant non nul. □

Exercice 13. Résoudre l'équation différentielle $y'' - 5y' + 6y = 0$ avec la condition initiale $y(0) = 5$ et $y'(0) = 12$.

Théorème 5. On considère trois nombres a , b et c réels avec $a \neq 0$ et on note $\Delta = b^2 - 4ac$, alors l'équation différentielle $ay'' + by' + cy = 0$ admet pour solutions à valeurs réelles les fonctions y définies par :

- Si $\Delta = 0$, $y(t) = (\lambda t + \mu)e^{r_0 t}$ avec λ et μ des nombres réels et r_0 la solution double de l'équation $ar^2 + br + c = 0$.
- Si $\Delta > 0$, $y(t) = \lambda e^{r_1 t} + \mu e^{r_2 t}$ avec λ et μ des nombres réels et r_1, r_2 les solutions de l'équation $ar^2 + br + c = 0$.
- Si $\Delta < 0$, $y(t) = \left(A \cos \left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a} t \right) + B \sin \left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a} t \right) \right) e^{-\frac{b}{2a} t}$ avec A et B des nombres réels.

Démonstration. Non exigible - On remarque que $y(t) = \frac{1}{2}(y(t) + \bar{y}(t))$. □

Exercice 14. Résoudre l'équation différentielle $y'' + 4y' + 5y = 0$ où y est une fonction à valeurs réelles.

Corollaire 1. Les solutions de l'équation différentielle $y'' + \omega^2 y = 0$ avec $\omega \in \mathbb{R}^*$ et y une fonction à valeurs dans \mathbb{R} sont les fonctions y définies par $y(t) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)$ avec A et B des nombres réels.

Démonstration. Exigible. □

Exercice 15. Résoudre l'équation différentielle $y'' + 2y = 0$ où y est une fonction à valeurs réelles.

3.2 Équations linéaires du second ordre à coefficients constants avec second membre

La méthode de variation de la constante permet de se ramener à une équation différentielle linéaire d'ordre 1 :

Propriété 6. On considère trois nombres a, b et c réels ou complexes avec $a \neq 0$ et une fonction d continue sur un intervalle I à valeurs dans \mathbb{R} ou \mathbb{C} , alors l'équation différentielle $ay'' + by' + cy = d(t)$ admet pour solutions les fonctions y définies par $y(t) = f(t)e^{rt}$ où r est une solution de l'équation $ar^2 + br + c = 0$ et f une primitive d'une solution de l'équation différentielle $y' + \left(2r + \frac{b}{a}\right)y = \frac{1}{a}d(t)e^{-rt}$.

Démonstration. Hors-programme - On pose $y(t) = f(t)e^{rt}$ avec r une solution de l'équation $ar^2 + br + c = 0$ et on montre que f est solution d'une équation différentielle linéaire. □

Exercice 16. Résoudre l'équation différentielle $y'' + 2y' + y = 2$ en utilisant la méthode de variation de la constante.

la méthode de la solution particulière permet de se ramener à une équation différentielle sans second membre :

Théorème 6. On considère trois nombres a, b et c réels ou complexes avec $a \neq 0$ et une fonction d continue sur un intervalle I à valeurs dans \mathbb{R} ou \mathbb{C} , alors l'équation différentielle $ay'' + by' + cy = d(t)$ admet pour solutions les fonctions y définies par $y(t) = \tilde{y}(t) + y_H(t)$ où \tilde{y} est une solution particulière de l'équation différentielle et y_H une solution de l'équation différentielle sans second membre associée.

Démonstration. Exigible - On remarque que l'équation différentielle admet une solution \tilde{y} et on montre que la fonction $f = y - \tilde{y}$ est solution de l'équation différentielle sans second membre associée. □

Exercice 17. Résoudre l'équation différentielle $y'' + 2y' + y = 2$ en cherchant une solution particulière sous la forme d'une fonction constante.

Propriété 7. On considère trois nombres a, b et c réels ou complexes avec $a \neq 0$ et une fonction d continue sur un intervalle I à valeurs dans \mathbb{R} ou \mathbb{C} , alors l'équation différentielle $ay'' + by' + c = d(t)$ avec la condition initiale $y(t_0) = \alpha$ et $y'(t_0) = \beta$ admet une unique solution.

Démonstration. Hors-programme. □

Exercice 18. Résoudre l'équation différentielle $y'' - 6y' + 8y = e^t$ avec la condition initiale $y(0) = 1$ et $y'(0) = 2$.

Le principe de superposition peut être utile lors de la recherche d'une solution particulière :

Propriété 8. On considère trois nombres a, b et c réels ou complexes avec $a \neq 0$ et deux fonctions d_1 et d_2 continues sur un intervalle I à valeurs dans \mathbb{R} ou \mathbb{C} . Si y_1 est une solution de l'équation différentielle $ay'' + by' + cy = d_1$ et y_2 une solution de l'équation différentielle $ay'' + by' + cy = d_2$ alors $y_1 + y_2$ est une solution de l'équation différentielle $ay'' + by' + cy = d_1 + d_2$.

Démonstration. Exigible. □

Exercice 19. Déterminer une solution particulière à valeurs dans \mathbb{R} de l'équation différentielle $y'' + y' + y = 3 \cos t - 2 \sin t$ en utilisant les formules d'Euler ainsi que le principe de superposition.