

V. Équations différentielles

Exercice 1

Déterminer les primitives de la fonction tangente sur l'intervalle $\left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$.

Exercice 2

Résoudre l'équation différentielle $y' + 2ty = t$.

Exercice 3

Résoudre l'équation différentielle $(t^2 + 1)y' + y = 1$.

Exercice 4

Résoudre l'équation différentielle $y' + y = t^2$.

Exercice 5

Résoudre l'équation différentielle $y' - y = te^t$.

Exercice 6

Résoudre l'équation différentielle $y' + y = 2 \cos t$.

Exercice 7

Résoudre l'équation différentielle $(t^2 + 1)y' + ty = \frac{1}{\sqrt{t^2 + 1}}$.

Exercice 8

Résoudre l'équation différentielle $(e^t + 1)y' + e^t y = e^t - 1$.

Exercice 9

Résoudre l'équation différentielle $\cos t y' - \sin t y = 1$ sur l'intervalle $\left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$.

Exercice 10

Résoudre l'équation différentielle $y' - \tan t y = \frac{1}{\cos t + 1}$ sur l'intervalle $\left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$.

Exercice 11

Résoudre l'équation différentielle $(t - 1)^2 y' + (t - 2)y = 0$ sur l'intervalle $]1; +\infty[$.

Exercice 12

Résoudre l'équation différentielle $y'' + y' - 2y = 0$.

Exercice 13

Résoudre l'équation différentielle $y'' - 2y' + y = 0$.

Exercice 14

Résoudre l'équation différentielle $y'' - 2y' + 2y = 0$ où y est à valeurs réelles.

Exercice 15

Résoudre l'équation différentielle $y'' - y' - 2y = 0$ avec les conditions initiales $y(0) = 1$ et $y'(0) = 1$.

Exercice 16

Résoudre l'équation différentielle $y'' + 2y' - 3y = 1 - 2t - 3t^2$.

Exercice 17

Résoudre l'équation différentielle $y'' - 4y' + 4y = te^{2t}$.

Exercice 18

Résoudre l'équation différentielle $y'' + y = e^t + e^{-t}$ où y est à valeurs réelles.

Exercice 19

Résoudre l'équation différentielle $y'' + 9y = 5 \cos(2t)$ avec les conditions initiales $y(0) = 2$ et $y'(0) = 2$.

Exercice 20

Résoudre l'équation différentielle $y'' + 4y' + 5y = (\cos t) e^{-2t}$.

Réponses

- 1) $F(t) = \ln(\cos t) + C.$
- 2) $y(t) = \frac{1}{2} + \lambda e^{-t^2}.$
- 3) $y(t) = 1 + \lambda e^{-\arctan t}.$
- 4) $y(t) = t^2 - 2t + 2 + \lambda e^{-t}.$
- 5) $y(t) = \left(\frac{t^2}{2} + \lambda\right) e^t.$
- 6) $y(t) = \cos t + \sin t + \lambda e^{-t}.$
- 7) $y(t) = \frac{\arctan t + \lambda}{\sqrt{t^2 + 1}}.$
- 8) $y(t) = \frac{e^t - t + \lambda}{e^t + 1}.$
- 9) $y(t) = \frac{t + \lambda}{\cos t}.$
- 10) $y(t) = \frac{t - \tan \frac{t}{2} + \lambda}{\cos t}$ en remarquant que $\frac{\cos t}{\cos t + 1} = 1 - \frac{1}{2(\cos \frac{t}{2})^2}.$
- 11) $y(t) = \frac{\lambda e^{-\frac{1}{t-1}}}{t-1}$ en remarquant que $\frac{t-2}{(t-1)^2} = \frac{1}{t-1} - \frac{1}{(t-1)^2}.$
- 12) $y(t) = \lambda e^t + \mu e^{-2t}.$
- 13) $y(t) = (\lambda + \mu t)e^t.$
- 14) $y(t) = (A \cos t + B \sin t)e^t.$
- 15) $y(t) = \frac{1}{3}e^{-t} + \frac{2}{3}e^{2t}.$
- 16) $y(t) = \frac{5}{3} + 2t + t^2 + \lambda e^t + \mu e^{-3t}.$
- 17) $y(t) = \left(\lambda + \mu t + \frac{t^3}{6}\right) e^{2t}.$
- 18) $y(t) = \frac{1}{2}e^t + \frac{1}{2}e^{-t} + \lambda \cos t + \mu \sin t.$
- 19) $y(t) = \cos(2t) + \cos(3t) + \frac{2}{3} \sin(3t).$
- 20) $y(t) = \left(\left(\frac{t}{2} + \lambda\right) \sin t + \mu \cos t\right) e^{-2t}$ en remarquant que $\cos t$ est la partie réelle de $e^{it}.$