VI. Géométrie de l'espace

Exercice 1

Dans un cube, déterminer l'angle entre les demi-droites ayant pour origine le centre et passant par deux sommets consécutifs.

Exercice 2

Dans l'espace muni d'une base orthonormale directe $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, déterminer $(\vec{j} + \vec{i}) \wedge (\vec{j} - \vec{i})$.

Exercice 3

On considère deux vecteurs orthogonaux $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de l'espace. Simplifier $\vec{u} \wedge (\vec{u} \wedge \vec{v})$.

Exercice 4

Dans l'espace, on considère deux points distincts A et B. Déterminer le lieu géométrique formé par les points M vérifiant $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AM} = \vec{0}$.

Exercice 5

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal, on considère les points $A(1;0;-1)$, $B(1;2;-1)$, $C(0;2;-1)$ et $D(1;2;2)$. Calculer le volume du tétraèdre $ABCD$.

Exercice 6

Exprimer $[\vec{v} + \vec{w}, \vec{w} + \vec{u}, \vec{u} + \vec{v}]$ en fonction de $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$.

Exercice 7

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal, on considère les points $A(1;2;3)$ et $B(3;2;1)$. Déterminer l'ensemble des points équidistants de A et B.

Exercice 8

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal, déterminer les coordonnées du projeté orthogonal du point $M(1;2;3)$ sur le plan d'équation cartésienne $x + y + z = 0$.

Exercice 9

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal on considère le plan $\mathcal{P} : x + 2y + 3z = 4$. Déterminer une équation cartésienne du symétrique du plan $\mathcal{P}$ par rapport au plan xOy.

Exercice 10

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal on considère le projeté orthogonal H d'un point M quelconque sur le plan d'équation cartésienne $x + y + z = 0$. Exprimer les coordonnées de H en fonction des coordonnées de M.

Exercice 11

Montrer que le système $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & = & 2 & + & t_1 & + & 3\,t_2 \\ y & = & 1 & - & 2\,t_1 & & \\ z & = & -1 & + & t_1 & + & t_2 \end{array}\right.$ avec $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ est le paramétrage d'un plan et déterminer une équation cartésienne de celui-ci.

Exercice 12

Dans l'espace muni d'un repère orthogonal, on considère les points $A(1;2;3)$ et $B(4;4;4)$. Déterminer le symétrique du point $M(-3;1;3)$ par rapport à la droite (AB).

Exercice 13

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal, déterminer les coordonnées du projeté orthogonal H du point $M(-2;4;0)$ sur la droite définie par le système d'équations cartésiennes $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & - & z & = & 1 \\ x & - & 2y & + & z & = & 0 \end{array}\right.$.

Exercice 14

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal, on considère les points $A(0;-1;2)$, $B(1;0;1)$, $C(0;2;0)$, $D(1;-1;-1)$ et $E(2;-2;-2)$. Déterminer l'intersection du plan (ABC) et de la droite (DE).

Exercice 15

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal, on considère les points $A(1;1;2)$, $B(1;2;3)$, $C(3;3;2)$, $D(3;2;3)$, $E(1;2;1)$ et $F(1;3;2)$. Déterminer l'intersection des plans (ABC) et (DEF).

Exercice 16

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal, déterminer l'intersection du plan d'équation cartésienne $x - y + z - 11 = 0$ avec la sphère de centre $\Omega(1;-1;3)$ et de rayon $2\sqrt{3}$.

Exercice 17

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal, on considère les points $A(1;0;2)$, $B(1;2;0)$ et $C(1;-2;1)$. Déterminer l'intersection de la droite (AB) et de la sphère de centre C et de rayon 3.

Exercice 18

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal, on considère les points $A(-2;6;0)$, $B(5;-1;0)$, $C(1;-2;3)$ et $D(-2;2;4)$. Déterminer une équation cartésienne de la sphère circonscrite au tétraèdre $ABCD$.

Réponses

1) $\arccos\left(\dfrac{1}{3}\right)$.

2) $2\overrightarrow{k}$.

3) $\overrightarrow{u}\wedge(\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{v})=-||\overrightarrow{u}||^2\overrightarrow{v}$.

4) Droite (AB).

5) $V=\dfrac{1}{6}\,[\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AD}]=1$.

6) $[\overrightarrow{v}+\overrightarrow{w},\overrightarrow{w}+\overrightarrow{u},\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}]=2\,[\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w}]$.

7) Plan d'équation cartésienne $x-z=0$.

8) Point $H(-1;0;1)$.

9) $x+2y-3z=4$.

10) $\left\{\begin{array}{rcl} x' &=& +\frac{2}{3}x-\frac{1}{3}y-\frac{1}{3}z \\ y' &=& -\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}y-\frac{1}{3}z \\ z' &=& -\frac{1}{3}x-\frac{1}{3}y+\frac{2}{3}z \end{array}\right.$.

11) $x-y-3z=4$.

12) $M'(-1;-1;1)$.

13) $H(1;1;1)$.

14) Point $(-1;1;1)$.

15) Droite passant par le point $(2;0;0)$ dirigée par le vecteur $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

16) Point $(3;-3;5)$.

17) Points $(1;1;1)$ et $(1;-2;4)$.

18) $(x-1)^2+(y-2)^2+z^2=5^2$.