VII. Systèmes linéaires - Matrices

Exercice 1

Écrire le système $\left\{\begin{array}{rcr} x-2z & = & 2 \\ x-y-t & = & -1 \\ 2z-3t & = & 0 \end{array}\right.$ sous forme matricielle $AU=V$ avec $U=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$.

Exercice 2

Montrer que les matrices $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ sont équivalentes en lignes.

Exercice 3

Pour chacune des matrices suivantes, déterminer une matrice échelonnée réduite en lignes qui lui soit équivalente en lignes :
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 7 \\ 11 & 13 & 17 & 19 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ 2 & -3 & 4 & -5 \\ 3 & -4 & 5 & -6 \end{pmatrix}$.

Exercice 4

Déterminer en fonction de $m\in\mathbb{R}$ une matrice échelonnée réduite en lignes qui soit équivalente en lignes à la matrice $\begin{pmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & 2 \\ 2 & 2 & m \end{pmatrix}$.

Exercice 5

Déterminer le rang du système $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & 2y & + & 3z & = & 0 \\ 4x & + & 5y & + & 6z & = & 0 \\ 7x & + & 8y & + & 9z & = & 0 \\ 10x & + & 11y & + & 12z & = & 0 \end{array}\right.$.

Exercice 6

Déterminer les valeurs de $m\in\mathbb{R}$ pour lesquelles le système $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} mx & + & y & + & 2z & = & 1 \\ x & + & y & + & z & = & 2 \\ 2x & + & y & + & mz & = & 3 \end{array}\right.$ d'inconnues x, y et z est compatible.

Exercice 7

Résoudre le système $\left\{\begin{array}{lcrcrcl} & & 2y & + & 3z & = & 1 \\ x & & & + & 3z & = & 2 \\ x & + & 2y & & & = & 3 \end{array}\right.$.

Exercice 8

Résoudre le système $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x & - & 3y & + & z & = & 1 \\ -3x & + & 2y & + & z & = & 2 \\ 7x & - & 8y & + & z & = & 0 \end{array}\right.$.

Exercice 9

Résoudre le système $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 1 \\ x & - & y & + & z & = & 1 \\ -x & + & y & + & z & = & -1 \\ x & + & y & - & z & = & 1 \end{array}\right.$.

Exercice 10

Résoudre le système $\left\{\begin{array}{rcrcrcrl} x & + & 2y & + & 3z & + & 4t = & 1 \\ 5x & + & 6y & + & 7z & + & 8t = & 1 \\ 9x & + & 10y & + & 11z & + & 12t = & 1 \end{array}\right.$.

Exercice 11

Résoudre en fontion de $m \in \mathbb{R}$ le système $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} mx & + & y & + & 2z & = & 1 \\ x & + & y & + & z & = & 2 \\ 2x & + & y & + & mz & = & 3 \end{array}\right.$ d'inconnues x, y et z.

Exercice 12

Montrer que la famille de vecteurs $\mathcal{F} = \left\{ \overrightarrow{u}_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} ; \overrightarrow{u}_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} ; \overrightarrow{u}_3 \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \\ 27 \end{pmatrix} ; \overrightarrow{u}_4 \begin{pmatrix} 4 \\ 16 \\ 64 \end{pmatrix} \right\}$ est génératrice de $\mathbb{R}^3$. La famille $\mathcal{F}$ est-elle libre ?

Exercice 13

On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

Calculer AB et BA.

Exercice 14

On pose $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$. Déterminer les matrices U telles que $MU = V$.

Exercice 15

On pose $M_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ pour $\theta \in \mathbb{R}$. Calculer $M_\alpha M_\beta$ pour $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, en déduire $(M_\theta)^n$ pour $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 16

On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, calculer M^n pour $n \in \mathbb{N}$ en utilisant la formule du binôme de Newton. (On pourra décomposer M sous la forme $M = I_3 + N$)

Exercice 17

Montrer que la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible et déterminer son inverse.

Exercice 18

Montrer que la matrice $M = \begin{pmatrix} 1+i & -1 & i \\ i & 0 & 1 \\ 1 & i & 1 \end{pmatrix}$ est inversible et déterminer son inverse. ($i^2 = -1$)

Exercice 19

On pose $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Exprimer M^2 comme combinaison linéaire de M et de I_3, en déduire que M est inversible et calculer M^{-1}.

Exercice 20

On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} \cos x & 0 & i\sin x \\ 0 & 1 & 0 \\ i\sin x & 0 & \cos x \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ avec $x \in \mathbb{R}$.
Calculer $B = P^{-1}AP$, en déduire A^n pour $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 21

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$.

Déterminer $\operatorname{Ker} A$ et $\operatorname{Im} A$.

Exercice 22

Déterminer le rang de la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Exercice 23

On note $M_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{pmatrix}$ pour $\lambda \in \mathbb{R}$. Déterminer le rang de M_λ en fonction de λ.

Réponses

1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

2) $L_3 \leftarrow \frac{1}{3}L_3$, $L_2 \leftarrow L_2 - L_3$, $L_2 \leftarrow \frac{1}{2}L_2$, $L_1 \leftarrow L_1 - L_3$ et $L_1 \leftarrow L_1 - L_2$.

3) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & -\frac{34}{7} \\ 0 & 1 & 3 & \frac{39}{7} \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

4) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ pour $m = 1$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ pour $m = 2$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{5}{8} \\ 0 & 1 & -\frac{7}{8} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ pour $m = -3$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ pour $m \neq 1$, $m \neq 2$ et $m \neq -3$.

5) Le rang du système est 2.

6) Le système est compatible pour $m \neq 2$.

7) $\left(x = 2\ ;\ y = \frac{1}{2}\ ;\ z = 0\right)$.

8) $\left(x = -\frac{8}{5} + z\ ;\ y = -\frac{7}{5} + z\ ;\ z = z\right)$.

9) $(x = 1\ ;\ y = 0\ ;\ z = 0)$.

10) $(x = -1 + z + 2t\ ;\ y = 1 - 2z - 3t\ ;\ z = z; t = t)$.

11) $(x = 1 + z\ ;\ y = 1 - 2z\ ;\ z = z)$ si $m = 0$, $\left(x = \frac{-1}{m-2}\ ;\ y = 2\ ;\ z = \frac{1}{m-2}\right)$ si $m \neq 0$ et $m \neq 2$, pas de solution pour $m = 2$.

12) On montre que $\overrightarrow{u}_4 = 4\overrightarrow{u}_1 - 6\overrightarrow{u}_2 + 4\overrightarrow{u}_3$.

13) $AB = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$ et $BA = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$.

14) $U = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

15) $M_\alpha M_\beta = M_{\alpha+\beta}$ et $(M_\theta)^n = M_{n\theta}$.

16) $M^n = \begin{pmatrix} 1 & 2n & n(2n+1) \\ 0 & 1 & 2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

17) $M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

18) $M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -i \\ 1+i & i & 1-2i \\ -i & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

19) $M^2 = 5M - 4I_3$ d'où $M^{-1} = \dfrac{1}{4}(5I_3 - M) = \dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

20) $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{ix} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-ix} \end{pmatrix}$ et $A^n = \begin{pmatrix} \cos(nx) & 0 & i\sin(nx) \\ 0 & 1 & 0 \\ i\sin(nx) & 0 & \cos(nx) \end{pmatrix}$.

21) $\operatorname{Ker} A = \left\{ z\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\ ,\ z \in \mathbb{K} \right\}$ et $\operatorname{Im} A = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}\ ,\ a, b, c \in \mathbb{K}\ /\ a - 2b + c = 0 \right\}$.

22) $\operatorname{rg} M = 2$.

23) Le rang de M_λ vaut 1 si $\lambda = 1$, 2 si $\lambda = -2$ et 3 sinon.