VIII. Ensembles de nombres

1 Ensemble $\mathbb{N}$ des nombres entiers naturels

Axiome 1.

- *toute partie non vide de $\mathbb{N}$ admet un plus petit élément.*
- *toute partie non vide majorée de $\mathbb{N}$ admet un plus grand élément.*

Exercice 1.

- *Montrer que l'ensemble $E = \left\{n \in \mathbb{N} / |\sin n| < \dfrac{n}{100}\right\}$ admet un plus petit élément.*
- *Montrer que l'ensemble $F = \{n \in \mathbb{N} / 2^n < n^3\}$ admet un plus grand élément.*

Théorème 1. Principe de récurrence
On considère une propriété P_n dépendant d'un nombre entier naturel n telle que :

- *P_0 est vraie (**initialisation**)*
- *si P_n est vraie alors P_{n+1} est vraie (**hérédité**)*

alors la propriété P_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Démonstration. Non exigible - On considère l'ensemble $E = \{n \in \mathbb{N}/P_n \textit{ fausse}\}$ et on suppose que $E \neq \varnothing$, il admet un plus petit élément $n_0 \neq 0$ et on s'intéresse à P_{n_0-1}. □

Remarque 1. *Dans le cas ou l'initialisation a lieu pour $n = n_0$, la propriété sera vraie pour tout $n \geqslant n_0$.*

Exemple 1. *Montrons que $4^n + 2$ est un multiple de 3 pour tout $n \in \mathbb{N}$.*
On considère la propriété $(P_n) : 4^n + 2$ est un multiple de 3.

- ***initialisation** : $4^0 + 2 = 3$ est un multiple de 3 donc la propriété P_n est vraie au rang $n = 0$.*
- ***hérédité** : supposons qu'il existe un entier naturel $n \in \mathbb{N}$ tel que P_n soit vraie, on a alors $4^n + 2 = 3k$ avec $k \in \mathbb{N}$ d'où $4^n = 3k - 2$, $4^{n+1} = 12k - 8$ et $4^{n+1} + 2 = 12k - 6 = 3(4k - 2)$ donc P_{n+1} est vraie.*
- ***conclusion** : d'après le principe de récurrence, la propriété P_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

Exercice 2. *Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}_+$ on a $(1 + x)^n \geqslant 1 + nx$.*

Exercice 3. *Montrer que la propriété « $8^n + 1$ est un multiple de 7 » est héréditaire, que peut-on en déduire ?*

Corollaire 1. Suite définie par récurrence
On considère une fonction f réelle ou complexe et un nombre a réel ou complexe, il existe une unique suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie par $\left\{\begin{array}{rcl} u_0 & = & a \\ u_{n+1} & = & f(u_n)\ ,\ \text{pour tout } n \geqslant 0 \end{array}\right.$.

Démonstration. Non exigible - On suppose qu'il existe deux suites distinctes $(u_n)_{n\geqslant 0}$ et $(v_n)_{n\geqslant 0}$ et on considère la propriété $(P_n)\ :\ u_n = v_n$. □

Exercice 4. *Démontrer que la suite $\left\{\begin{array}{rcl} u_0 & = & 0 \\ u_{n+1} & = & 2u_n + 1\ ,\ \text{pour tout } n \geqslant 0 \end{array}\right.$ définie par récurrence admet pour forme explicite $u_n = 2^n - 1$, pour tout $n \geqslant 0$.*

Remarque 2. *On peut également définir une suite par récurrence sur les deux termes précédents en donnant u_0 et u_1 en condition initiale.*

Corollaire 2. Principe de récurrence avec prédécesseurs
On considère une propriété P_n dépendant d'un nombre entier naturel n telle que :
- *P_0 est vraie (**initialisation**)*
- *si P_0 et P_1 et ... et P_n sont vraies alors P_{n+1} vraie (**hérédité forte**)*

alors la propriété P_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Démonstration. Non exigible - On considère la propriété Q_n : P_0 et P_1 et ... et P_n. □

Exercice 5. *Démontrer que la suite* $\left\{\begin{array}{rcl} u_0 & = & 1 \\ u_1 & = & 2 \\ u_{n+2} & = & 3u_{n+1} - 2u_n \ , \ n \geqslant 0 \end{array}\right.$ *définie par récurrence admet pour forme explicite $u_n = 2^n \ , \ n \geqslant 0$.*

Définition 1. Symbole somme
Étant donnés un entier naturel n non nul et n nombres $a_1, \ a_2, \ \ldots \ , a_n$ réels ou complexes, on note :

$$\boxed{\sum_{1 \leqslant k \leqslant n} a_k = \sum_{k=1}^{k=n} a_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_n}$$

Remarque 3. *On a* $\displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} a = na$ *pour a un nombre réel ou complexe et $n \in \mathbb{N}^*$.*

Propriété 1. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$, alors* $\boxed{\displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} k = \frac{n(n+1)}{2}}$.

Démonstration. Exigible. □

Exercice 6. *Démontrer que* $\displaystyle\sum_{k=0}^{k=n} 2^k = 2^{n+1} - 1$ *pour $n \in \mathbb{N}$.*

Définition 2. Symbole produit
Étant donnés un entier naturel n non nul et n nombres $a_1, \ a_2, \ \ldots \ , a_n$ réels ou complexes, on note :

$$\boxed{\prod_{1 \leqslant k \leqslant n} a_k = \prod_{k=1}^{k=n} a_k = a_1 \times a_2 \times \cdots \times a_n}$$

Remarque 4. *On a* $\displaystyle\prod_{k=1}^{k=n} a = a^n$ *pour a un nombre réel ou complexe et $n \in \mathbb{N}^*$.*

Définition 3. Symbole factorielle
*Étant donné un entier naturel n on définit sa **factorielle** $n!$ par :*

$$\boxed{\begin{array}{rcl} 0! & = & 1 \\ n! & = & \displaystyle\prod_{k=1}^{k=n} k = 1 \times 2 \times \cdots \times n \ , \ n > 0 \end{array}}$$

Définition 4. *Étant donné un nombre r réel ou complexe, on appelle* **suite arithmétique** *de* **raison** *r une suite définie par la relation de récurrence $u_{n+1} = u_n + r$, $n \in \mathbb{N}$.*

Exemple 2. *La suite des entiers pairs et la suite des entiers impairs sont arithmétiques de raison 2.*

Propriété 2. *On considère une suite arithmétique $(u_n)_{n\geqslant 0}$ de raison r et $p, q \in \mathbb{N}$ avec $p \leqslant q$, alors :*

$$u_q = u_p + (q-p)r \qquad\qquad \sum_{k=p}^{k=q} u_k = (q-p+1)\frac{u_p + u_q}{2}$$

Démonstration. Exigible - On procède par récurrence sur q. □

Exercice 7. *Calculer la somme des n premiers entiers impairs.*

Définition 5. *Étant donné un nombre r réel ou complexe, on appelle* **suite géométrique** *de* **raison** *r une suite définie par la relation de récurrence $u_{n+1} = u_n \times r$, $n \in \mathbb{N}$.*

Exemple 3. *La suite des puissances de deux est géométrique.*

Propriété 3. *On considère une suite géométrique $(u_n)_{n\geqslant 0}$ de raison r et $p, q \in \mathbb{N}$ avec $p \leqslant q$, alors :*

$$u_q = u_p \times r^{q-p} \qquad\qquad \sum_{k=p}^{k=q} u_k = \frac{u_p - r \times u_q}{1-r} \text{ si } r \neq 1$$

Démonstration. Exigible - On procède par récurrence sur q. □

Exercice 8. *Calculer* $\displaystyle\sum_{k=0}^{k=n} 2^k$.

2 Ensembles finis

2.1 Définition d'un ensemble fini

Définition 6. Image directe et image réciproque
Étant donnés une application $f : E \to F$, $A \subset E$ et $B \subset F$, on appelle **image directe** *de A par f et on note $f(A)$ l'ensemble des images par f des éléments de A et on appelle* **image réciproque** *de B par f et on note $f^{-1}(B)$ l'ensemble des antécédents par f des éléments de B :*

$$\boxed{f(A) = \{f(x)/x \in A\}} \qquad \boxed{f^{-1}(B) = \{x/f(x) \in B\}}$$

Remarque 5. *On a $f(A) \subset F$ et $f^{-1}(B) \subset E$.*

Exercice 9. *On considère* $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$, *déterminer $f([-1;1])$ et $f^{-1}([1;2])$.*

Définition 7. *Une application $f : E \to F$ est dite* **injective** *si tout élément de F admet au plus un antécédent par f,* **surjective** *si tout élément de F admet au moins un antécédent par f et* **bijective** *si tout élément de F admet exactement un antécédent par f.*

Remarque 6. *Une application est bijective si et seulement si elle est à la fois injective et surjective.*

Remarque 7. *Une application $f : E \to F$ est surjective si et seulement si $f(E) = F$.*

Remarque 8. *Si $f : E \to F$ est injective alors $g : \begin{array}{rcl} E & \to & f(E) \\ x & \mapsto & f(x) \end{array}$ est bijective.*

Exemple 4. *On considère $f_1 : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$, $f_2 : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$ et $f_3 : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$: f_1 est une injection, f_2 est une surjection et f_3 est une bijection.*

Exercice 10. *Montrer que $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{1}{x} \end{array}$ est injective.*

Définition 8. *Étant donnés $p, q \in \mathbb{N}$ avec $p \leqslant q$, on note $\boxed{[\![p, q]\!] = \{n \in \mathbb{N} / p \leqslant n \leqslant q\}}$.*

Définition 9. *Un ensemble E est dit fini s'il est vide ou s'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ et une bijection de $[\![1, n]\!]$ sur E, le nombre n est alors unique et appelé* **cardinal** *ou* **nombre d'éléments** *de l'ensemble E noté $\mathrm{Card}(E)$, on convient que $\mathrm{Card}(\varnothing) = 0$.*

Remarque 9. *La bijection de la définition correspond à l'idée intuitive de numérotation.*

Exercice 11. *Montrer que l'ensemble $E = [\![5, 10]\!]$ est fini et déterminer son cardinal.*

Propriété 4. *On considère deux ensembles E et F avec $E \subset F$, si F est un ensemble fini alors E est un ensemble fini et $\mathrm{Card}(E) \leqslant \mathrm{Card}(F)$ avec $\mathrm{Card}(E) = \mathrm{Card}(F)$ si et seulement si $E = F$.*

Démonstration. Hors programme. □

Propriété 5. *On considère deux ensembles finis E et F ainsi qu'une bijection $f : E \to F$ alors $\mathrm{Card}(E) = \mathrm{Card}(F)$.*

Démonstration. Hors programme. □

Propriété 6. *On considère deux ensembles finis E et F avec $\mathrm{Card}(E) = \mathrm{Card}(F)$ ainsi qu'une application $f : E \to F$ alors les propositions suivantes sont équivalentes :*
- *f est injective*
- *f est surjective*
- *f est bijective*

Démonstration. Hors programme. □

Contre-exemple 1. *L'application $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ n & \mapsto & n^2 \end{array}$ est injective mais pas surjective.*

2.2 Dénombrements

Propriété 7. *On considère deux ensembles finis E et F alors $E \cup F$ et $E \cap F$ sont des ensembles finis et $\boxed{\mathrm{Card}(E \cup F) = \mathrm{Card}(E) + \mathrm{Card}(F) - \mathrm{Card}(E \cap F)}$.*

Démonstration. Hors programme. □

Exercice 12. *Vérifier la formule avec $E = [\![2, 5]\!]$ et $F = [\![3, 7]\!]$.*

Propriété 8. *On considère deux ensembles finis E et F alors $E \times F = \{(x; y) / x \in E, y \in F\}$ est un ensemble fini et $\boxed{\mathrm{Card}(E \times F) = \mathrm{Card}(E) \times \mathrm{Card}(F)}$.*

Démonstration. Hors programme. □

Exercice 13. *Déterminer les éléments de $[\![1, 2]\!] \times [\![1, 3]\!]$.*

Propriété 9. *On considère deux ensembles finis E et F alors l'ensemble $\mathcal{F}(E,F)$ des applications de E dans F est un ensemble fini et* $\boxed{\mathrm{Card}(\mathcal{F}(E,F)) = \mathrm{Card}(F)^{\mathrm{Card}(E)}}$.

Démonstration. Hors programme. □

Exercice 14. *Déterminer les éléments de $\mathcal{F}(\llbracket 1,2\rrbracket, \llbracket 1,3\rrbracket)$.*

Exercice 15. *Déterminer les injections de $\llbracket 1,2\rrbracket$ dans $\llbracket 1,3\rrbracket$.*

Propriété 10. *On considère un ensemble fini E de cardinal n, l'ensemble des bijections de E dans E appelées également* **permutations** *est de cardinal $n!$.*

Démonstration. Hors programme. □

Exercice 16. *Déterminer les permutations de $\llbracket 1,3\rrbracket$.*

Propriété 11. *On considère un ensemble fini E, alors l'ensemble $\mathcal{P}(E)$ des parties de E est un ensemble fini et* $\boxed{\mathrm{Card}(\mathcal{P}(E)) = 2^{\mathrm{Card}(E)}}$.

Démonstration. Hors programme. □

Exercice 17. *Déterminer $\mathcal{P}(\llbracket 1,3\rrbracket)$.*

Propriété 12. *On considère un ensemble fini E de cardinal $n \neq 0$ et $p \in \llbracket 0,n\rrbracket$, alors l'ensemble des parties de E ayant p éléments est un ensemble fini de cardinal* $\boxed{\begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix} = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}}$.

Démonstration. Hors programme. □

Exercice 18. *Déterminer les parties de $\llbracket 1,4\rrbracket$ ayant 2 éléments.*

Propriété 13. *On considère $n \in \mathbb{N}^*$, alors :*

$$\boxed{\begin{array}{rcl} \begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} n \\ n-p \end{pmatrix} \ , \ p \in \llbracket 0,n\rrbracket \\ \begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} n-1 \\ p-1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n-1 \\ p \end{pmatrix} \ , \ p \in \llbracket 1,n-1\rrbracket \\ \displaystyle\sum_{k=0}^{k=n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} & = & 2^n \end{array}}$$

Démonstration. Non exigible - On construit une bijection entre l'ensemble des parties de E ayant p éléments et l'ensemble des parties de E ayant $n-p$ éléments, on partage l'ensemble des parties de E ayant p éléments entre celles possédant ou ne possédant pas un élément donné. On remarque que l'ensemble des parties de E peut être partitionné en utilisant les ensembles des parties de E ayant p éléments. □

Propriété 14. **Formule du binôme**
On considère x et y deux nombres réels ou complexes et $n \in \mathbb{N}^*$ alors :

$$\boxed{(x+y)^n = \sum_{k=0}^{k=n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} x^{n-k} y^k}$$

Démonstration. Non exigible - On procède par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$. □