VIII. Ensembles de nombres

Exercice 1

Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $n \leqslant 2^n$.

Exercice 2

Démontrer que le n-ième nombre entier impair est $2n - 1$.

Exercice 3

Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction sinus est n fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$\sin^{(n)}(x) = \sin\left(x + n\dfrac{\pi}{2}\right)$, $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 4

Montrer que si $n \in \mathbb{N}$ est un multiple de 3 alors le reste de la division euclidienne de 2^n par 7 vaut 1.

Exercice 5

On considère la suite $\left\{ \begin{array}{rcl} u_0 & = & 0 \\ u_1 & = & 1 \\ u_{n+2} & = & 5u_{n+1} - 6u_n \ , \ n \geqslant 0 \end{array} \right.$.

Démontrer qu'elle admet pour forme explicite $u_n = 3^n - 2^n$, $n \geqslant 0$.

Exercice 6

Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{1}{x} \end{array}$ est n fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et déterminer sa dérivée n-ième.

Exercice 7

On considère la suite $\left\{ \begin{array}{rcl} u_0 & = & 1 \\ u_1 & = & 1 \\ u_{n+2} & = & (n+2)(u_n + u_{n+1}) \ , \ n \in \mathbb{N} \end{array} \right.$.

Démontrer que $n! \leqslant u_n \leqslant (n+1)!$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 8

Calculer $\sum_{k=0}^{k=n}(2k+1)$ et $\prod_{k=0}^{k=n} 2^k$.

Exercice 9

Montrer que $(k+1)! - k! = k(k!)$, en déduire $\sum_{k=0}^{k=n} k(k!)$.

Exercice 10

On considère la suite $\left\{\begin{array}{rcl} u_0 & = & 1 \\ u_{n+1} & = & 3\ u_n + 2\ ,\ n \in \mathbb{N} \end{array}\right.$.

Déterminer a tel que la suite $(v_n)_{n\geqslant 0}$ définie par $v_n = u_n + a\ ,\ n \in \mathbb{N}$ soit géométrique, en déduire la forme explicite de la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$.

Exercice 11

Calculer $\sum_{k=0}^{k=n} 2^{2k+1}$ et $\prod_{k=0}^{k=n} 2^{2k+1}$.

Exercice 12

On considère la fonction $f: \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 2x^3 + 3x^2 - 12x \end{array}$, déterminer $f([-2;2])$ et $f^{-1}([-7;20])$.

Exercice 13

On considère les fonctions $f: \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$ et $g: \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sqrt{x} \end{array}$.

Montrer que l'on peut définir $f \circ g$ et $g \circ f$ et les expliciter.

Exercice 14

Montrer que l'application $f: \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x;y) & \mapsto & (x+y; x-y) \end{array}$ est bijective.

Exercice 15

Déterminer le nombre de surjections de $[\![1;3]\!]$ dans $[\![1;2]\!]$.

Exercice 16

Déterminer le nombre d'injections de $[\![1;p]\!]$ dans $[\![1;n]\!]$.

Exercice 17

Un domino est composé de deux parties comprenant chacune un nombre entier compris entre 0 et 6. Combien y a-t-il de dominos distincts ?

Exercice 18

On appelle main un ensemble de cinq cartes. Combien existe-t-il de mains formées à partir d'un jeu de 32 cartes comprenant au moins 3 as ?

Exercice 19

Calculer la probabilité d'obtenir un carré dans une main à partir d'un jeu de 52 cartes.

Exercice 20

Déterminer le nombre de diviseurs positifs de 720.

Exercice 21

On considère une table circulaire comportant $2n$ places, $n \in \mathbb{N}^*$. On désire disposer autour de cette table les $2n$ individus que constituent n couples hétérosexuels.

1. Déterminer le nombre de dispositions des $2n$ individus.
2. Déterminer le nombre de dispositions des $2n$ individus respectant l'alternance homme-femme.
3. Déterminer le nombre de dispositions des $2n$ individus ne séparant pas les couples.
4. Déterminer le nombre de dispositions des $2n$ individus ne séparant pas les couples et respectant l'alternance homme-femme.

Exercice 22

On considère la fonction $f : x \mapsto (e^x + 1)^n$, $n \in \mathbb{N}$. Montrer que f est dérivable et exprimer f et f' à l'aide de la formule du binôme de Newton, en déduire $\displaystyle\sum_{k=0}^{k=n} k \binom{n}{k}$.

Réponses

1) On procède par récurrence sur n.

2) On procède par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$.

3) On procède par récurrence sur n en remarquant que $\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$.

4) On pose $n = 3k$ et on procède par récurrence sur k.

5) On procède par récurrence forte sur n.

6) $f^{(n)}(x) = \dfrac{(-1)^n\, n!}{x^{n+1}}$.

7) On procède par récurrence avec prédécesseurs sur n.

8) $(n+1)^2$ et $2^{\frac{n(n+1)}{2}}$.

9) $(n+1)! - 1$.

10) $u_n = 2 \times 3^n - 1\ ,\ n \in \mathbb{N}$.

11) $\dfrac{1}{3}\left(2^{2n+3} - 2\right)$ et $2^{\left[(n+1)^2\right]}$.

12) $f([-2;2]) = [-7;20]$ et $f^{-1}([-7;20]) = \left[-\dfrac{7}{2}; \dfrac{5}{2}\right]$.

13) $f \circ g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & x \end{array}$ et $g \circ f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & |x| \end{array}$.

14) On montre que f est injective et surjective.

15) 6.

16) 0 si $p > n$ et $\dfrac{n!}{(n-p)!}$ sinon.

17) $7 + \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix} = 28$ dominos.

18) $\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 28 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 28 \\ 2 \end{pmatrix} = 1540$.

19) $\frac{13\times 48}{\binom{52}{5}} = \frac{13\times 48\times 1\times 2\times 3\times 4\times 5}{52\times 51\times 50\times 49\times 48} = \frac{1}{17\times 5\times 49} = \frac{1}{4165}$.

20) $720 = 2^4 \times 3^2 \times 5$ admet $5 \times 3 \times 2 = 30$ diviseurs.

21)
1. $(2n)!$: on place d'abord un individu sur une place donnée puis les autres successivement en tournant autour de la table.
2. $2(n!)^2$: $2n \times n \times (n-1) \times (n-1) \times (n-2) \times (n-2) \ldots$.
3. $2^{n+1} n!$ si $n > 1$ et 2 si $n = 1$: une fois placé le premier individu, il y a deux façons de placer son conjoint si $n > 1$, pour les couples suivants il n'y a qu'une façon de placer le conjoint.
4. $4n!$ si $n > 1$ et 2 si $n = 1$.

22) La somme vaut $f'(0) = n2^{n-1}$.