X. Polynômes

Exercice 1

On considère le polynôme $P(X) = X^2 - X + 1$. Calculer $(P(X))^2$ et $P(P(X))$.

Exercice 2

Étant donné $n \in \mathbb{N}$, on considère le polynôme $P_n(X) = \sum_{k=0}^{k=n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} X^k (1-X)^{n-k}$.
Calculer $P_0(X)$, $P_1(X)$, $P_2(X)$ et $P_3(X)$, que peut-on dire de $P_n(X)$ pour $n \in \mathbb{N}$?

Exercice 3

Montrer qu'un polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ est pair si et seulement si il existe un polynôme $Q \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P(X) = Q(X^2)$.

Exercice 4

Déterminer le degré du polynôme $P(X) = (X^2+1)^n + (X^2-1)^n - 2X^{2n}$ pour $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 5

Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ vérifiant l'égalité $P(X^2) = (X^2+1)P(X)$.
(on pourra commencer par déterminer le degré de P)

Exercice 6

Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ vérifiant l'égalité $P(P(X)) = P(X)$.
(on pourra commencer par déterminer le degré de P)

Exercice 7

Montrer que X^2 divise $(X+1)^n - nX - 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
(on pourra commencer par déterminer les coefficients des monômes de degré 0 et 1)

Exercice 8

Déterminer le quotient et le reste de la division euclidienne de $X^3 + X^2 + 9$ par $X^2 - 2X + 3$.

Exercice 9

Déterminer les réels a et b tels que le polynôme $X^2 + aX + 1$ divise le polynôme $X^4 + bX^2 + 1$.

Exercice 10

Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré 3 dont le reste de la division euclidienne par $X^2 - 1$ est $1 - X$ et dont le reste de la division euclidienne par $X^2 + 1$ est $X - 1$.

Exercice 11

On considère deux nombres complexes α et β distincts et un polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$. Exprimer le reste de la division euclidienne de $P(X)$ par $(X - \alpha)(X - \beta)$ en fonction de $P(\alpha)$ et $P(\beta)$.

Exercice 12

On considère le polynôme $P(X) = X^5 + 2X^4 + X^3 + X^2 + 2X + 1$. Montrer que -1 est racine de P et déterminer son ordre de multiplicité.

Exercice 13

Montrer que le polynôme $X^3 - X^2 - 2X + 1$ admet trois racines réelles distinctes α, β et γ et déterminer pour chacune de ces racines un encadrement par deux entiers consécutifs, calculer leur somme et leur produit.

Exercice 14

Décomposer le polynôme $P(X) = X^3 - X^2 + 2iX - 2i$ en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$.

Exercice 15

Décomposer le polynôme $P(X) = X^4 - 1$ en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$ et dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 16

Montrer que i est une racine complexe du polynôme $P(X) = X^4 + X^3 + 2X^2 + X + 1$, en déduire une factorisation de $P(X)$ dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 17

On considère un nombre complexe α et un polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$. Exprimer le reste de la division euclidienne de $P(X)$ par $(X - \alpha)^2$ en fonction de $P(\alpha)$ et $P'(\alpha)$.

Exercice 18

Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que $3P(X) = XP'(X) + P''(X)$.
(on pourra commencer par déterminer le degré de P)

Exercice 19

Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ vérifiant l'égalité $P'^2 = 4P$.
(on pourra commencer par déterminer le degré de P)

Exercice 20

Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ vérifiant l'égalité $P' + P = \dfrac{1}{n!}X^n$ avec $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 21

Déterminer $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P(1) = 0$, $P'(1) = 1$, $P''(1) = 2$ et $P^{(k)}(1) = 0$ pour tout $k \geqslant 3$.

Exercice 22

Déterminer $z \in \mathbb{C}$ pour que le polynôme $P(X) = X^3 + 3X + z$ admette une racine double, factoriser dans ce cas le polynôme $P(X)$.

Exercice 23

Montrer que 1 est racine du polynôme $nX^{n+1} - (n+1)X^n + 1$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ et déterminer son ordre.

Exercice 24

Montrer que le polynôme $X^{n+2} - X + 1$ n'admet que des racines simples pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 25

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ le polynôme $P_n(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{k=n} \frac{X^k}{k!}$ possède n racines distinctes dans $\mathbb{C}$.

Réponses

1) $(P(X))^2 = X^4 - 2X^3 + 3X^2 - 2X + 1$ et $P(P(X)) = X^4 - 2X^3 + 2X^2 - X + 1$.

2) $P_n(X) = [X + (1 - X)]^n = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3) On montre que $P(X) = \sum_{k=0}^{k=n} a_k X^{2k}$.

4) $\deg(P) = -\infty$ si $n < 2$ et $\deg(P) = 2n - 4$ si $n \geqslant 2$.

5) $P(X) = a(X^2 - 1)$ avec $a \in \mathbb{C}$.

6) P est un polynôme constant ou le polynôme identité.

7) $a_0 = \binom{n}{0} - 1 = 0$ et $a_1 = \binom{n}{1} - n = 0$.

8) $Q(X) = X + 3$ et $R(X) = 3X$.

9) $R(X) = a(2 - b - a^2)X + (b - 2 + a^2)$ d'où $a^2 + b = 2$.

10) $P(X) = -X^3 + X^2$.

11) $R(X) = \dfrac{P(\alpha) - P(\beta)}{\alpha - \beta} X + \dfrac{\alpha P(\beta) - \beta P(\alpha)}{\alpha - \beta}$.

12) -1 est une racine d'ordre 3 du polynôme P.

13) $-2 < \alpha < -1$, $0 < \beta < 1$, $1 < \gamma < 2$ de plus $\alpha + \beta + \gamma = 1$ et $\alpha\beta\gamma = -1$.

14) $P(X) = (X - 1)(X - 1 + i)(X + 1 - i)$.

15) $P(X) = (X - 1)(X - i)(X + 1)(X + i) = (X - 1)(X + 1)(X^2 + 1)$.

16) $P(X) = (X^2 + 1)(X^2 + X + 1)$.

17) $P(X) = P'(\alpha)(X - \alpha) + P(\alpha)$.

18) $P(X) = aX(X^2 + 3)$ avec $a \in \mathbb{C}$.

19) $P = 0$ ou $P = (X + a)^2$ avec $a \in \mathbb{C}$.

20) $P(X) = \sum_{k=0}^{k=n} \dfrac{(-1)^{n-k}}{k!} X^k$.

21) $P(X) = 0 + 1(X - 1) + 2\dfrac{(X - 1)^2}{2!} = X^2 - X$.

22) $z = -2i$ et $P(X) = (X + 2i)(X - i)^2$ ou $z = 2i$ et $P(X) = (X - 2i)(X + i)^2$.

23) 1 est racine d'ordre 2.

24) Une racine double α de P est racine de P', on obtient $\alpha = \dfrac{n+2}{n+1} > 1$ et $\alpha^{n+1} = \dfrac{1}{n+2} < 1$.

25) On remarque que $P_n(X) = \dfrac{X^n}{n!} + P_n'(X)$ et on en déduit que P_n ne possède pas de racine d'ordre supérieur ou égal à 2.