XII. Espaces vectoriels

Exercice 1

Montrer que l'ensemble des matrices triangulaires supérieures est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
L'ensemble des matrices inversibles est-il un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?

Exercice 2

Montrer que l'ensemble des suites réelles convergentes est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des suites réelles.
L'ensemble des suites réelles qui divergent vers $+\infty$ est-il un sous-espace vectoriel de l'ensemble des suites réelles ?

Exercice 3

Montrer que l'ensemble des fonctions paires et l'ensemble des fonctions impaires sont deux sous-espaces vectoriels de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

Exercice 4

L'ensemble des fonctions monotones est-il un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$?

Exercice 5

Montrer que l'ensemble des fonctions paires et l'ensemble des fonctions impaires sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

Exercice 6

Montrer que l'ensemble des fonctions constantes et l'ensemble des fonctions s'annulant en 0 sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

Exercice 7

Montrer que l'ensemble des fonctions linéaires et l'ensemble des fonctions s'annulant en 1 sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

Exercice 8

On considère les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$, $F = \left\{ \begin{pmatrix} t \\ t \\ 0 \end{pmatrix} \ / \ t \in \mathbb{R} \right\}$ et $G = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ t \\ t \end{pmatrix} \ / \ t \in \mathbb{R} \right\}$.
Déterminer $F + G$, la somme $F + G$ est-elle directe ?

Exercice 9

On considère les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}[X]$, $F = \{P \in \mathbb{R}[X] \ / \ P(0) = 0\}$ et $G = \{P \in \mathbb{R}[X] \ / \ P'(0) = 0\}$.
Déterminer $F + G$, la somme $F + G$ est-elle directe ?

Exercice 10

Dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$, déterminer $\text{Vect}(1, i)$.

Exercice 11

Dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, déterminer $\text{Vect}(x \mapsto \cos\left(x + \frac{k\pi}{4}\right), k \in [\![0; 7]\!])$.

Exercice 12

$((X-1)(X-2), (X-2)(X-3), (X-1)(X-3))$ est-elle une famille libre de $\mathbb{R}[X]$?

Exercice 13

Montrer que si $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ est une famille libre alors $(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}, \overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}, \overrightarrow{u} + \overrightarrow{w})$ est une famille libre.

Exercice 14

Montrer que $(1, 1+X, 1+X+X^2, \dots, 1+X+X^2+\dots+X^n)$ est une famille libre de $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 15

Donner une base de $\mathbb{C}^3$ en tant que $\mathbb{C}$-espace vectoriel puis en tant que $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Exercice 16

Montrer que l'ensemble des fonctions à valeurs réelles solutions de l'équation différentielle $y'' - 2y' + 2y = 0$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et déterminer sa dimension.

Exercice 17

Montrer que $\left(\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\right)$ est une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et déterminer les coordonnées de la matrice identité I_2 dans cette base.

Exercice 18

Déterminer une base du sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$, $E = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \;/\; x + 2y + 3z = 0 \right\}$ puis la compléter en une base de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 19

Déterminer un supplémentaire de $\text{Vect}(1 + X + X^2)$ dans $\mathbb{R}_2[X]$.

Exercice 20

Trouver le rang de la famille de vecteurs $(1+X, 1-X, 1+X^2, 1-X^2)$ dans $\mathbb{R}_2[X]$.

Réponses

1) On remarque que la matrice nulle n'est pas inversible.

2) On remarque que la suite nulle n'est pas une suite qui diverge vers $+\infty$.

3) On remarque que la fonction nulle est une fonction paire et qu'une combinaison linéaire de fonctions paires est une fonction paire, on remarque que la fonction nulle est une fonction impaire et qu'une combinaison linéaire de fonctions impaires est une fonction impaire.

4) Si f est la fonction identité et g la fontion cube, $f-g$ n'est pas monotone.

5) On remarque que $f(x)=\frac{1}{2}[f(x)+f(-x)]+\frac{1}{2}[f(x)-f(-x)]$ et que la seule fonction à la fois paire et impaire est la fonction nulle.

6) On remarque que $f(x)=f(0)+[f(x)-f(0)]$ et qu'une fonction constante s'annulant en 0 est nulle.

7) On remarque que $f(x)=f(1)x+[f(x)-f(1)x]$ et qu'une fonction linéaire s'annulant en 1 est nulle.

8) $F\oplus G=\left\{\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}\ /\ x-y+z=0\right\}$.

9) $F+G=\mathbb{R}[X]$ car $P(X)=(P(X)-P(0))+P(0)$, on remarque que la somme n'est pas directe en considérant le polynôme $P(X)=X^2$.

10) $\mathrm{Vect}(1,i)=\mathbb{C}$.

11) $\mathrm{Vect}(\cos,\sin)$.

12) On recherche λ, μ et ν tels que $\lambda(X-1)(X-2)+\mu(X-2)(X-3)+\nu(X-1)(X-3)=0$ en utilisant la liberté de la famille $(1,X,X^2)$.

13) On recherche λ, μ et ν tels que $\lambda(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v})+\mu(\overrightarrow{v}+\overrightarrow{w})+\nu(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{w})=0$ en utilisant la liberté de la famille $(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w})$.

14) On procède par récurrence en remarquant que $\sum_{k=1}^{k=n+1}\lambda_k(1+X+\cdots+X^k)=\sum_{k=1}^{k=n-1}\lambda_k(1+X+\cdots+X^k)+(\lambda_n+\lambda_{n+1})(1+X+\cdots+X^n)+\lambda_{n+1}X^{n+1}$.

15) $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$ et $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}i\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\i\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\i\end{pmatrix}\right\}$.

16) On montre que $(t\mapsto e^t\cos t, t\mapsto e^t\sin t)$ est une base.

17) $\begin{pmatrix}0\\ \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}\\ 0\end{pmatrix}$

18) $\left\{\begin{pmatrix}-2\\-1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-3\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$ et $\left\{\begin{pmatrix}-2\\-1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-3\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$.

19) $\mathbb{R}_1[X]$.

20) Le rang est 3 en remarquant que $1=\frac{1}{2}(1+X)+\frac{1}{2}(1-X)$, $X=\frac{1}{2}(1+X)-\frac{1}{2}(1-X)$ et $X^2=\frac{1}{2}(1+X^2)-\frac{1}{2}(1-X^2)$.