XIII. Dérivation

Exercice 1

La fonction $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \left\{ \begin{array}{lll} 2x^2+x+2 & \text{si} & x<1 \\ x^2+3x+1 & \text{si} & x \geqslant 1 \end{array} \right. \end{array}$ est-elle dérivable sur $\mathbb{R}$?

Exercice 2

Montrer que la fonction $x \mapsto x \ln x$ peut se prolonger par continuité en une fonction $\tilde{f}$ définie sur $[0;+\infty[$. La fonction $\tilde{f}$ est-elle dérivable sur $[0;+\infty[$?

Exercice 3

On considère $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, montrer que si f est paire alors f' est impaire et que si f est impaire alors f' est paire.

Exercice 4

Étudier $\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ x\neq 0}} \dfrac{\sqrt[3]{1+x}-1}{x}$ puis $\lim\limits_{\substack{x\to \frac{\pi}{3} \\ x\neq \frac{\pi}{3}}} \dfrac{2\cos x - 1}{\pi - 3x}$.

Exercice 5

Montrer que si une fonction $f \in \mathcal{F}(I,\mathbb{R})$ est dérivable en $a \in I$ alors $\dfrac{f(a+h)-f(a-h)}{2h} \underset{h\to 0}{\longrightarrow} f'(a)$.

Exercice 6

On considère une fonction $f \in \mathcal{F}(I,\mathbb{R})$ dérivable en $a \in I$, étudier $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{xf(a)-af(x)}{x-a}$.

Exercice 7

Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{k=n} ke^{kx}$.

Exercice 8

Montrer que $\arctan\left(\dfrac{e^{2x}-e^{-2x}}{2}\right) = 2\arctan\left(\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}\right)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 9

Montrer que la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{1+x}$ est n fois dérivable sur $]-1;1[$ et déterminer $f^{(n)}(x)$.
En déduire que les fonctions $g : x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$ et $h : x \mapsto \dfrac{1}{1-x^2}$ sont n fois dérivables sur $]-1;1[$ et déterminer $g^{(n)}(x)$ et $h^{(n)}(x)$.

Exercice 10

Montrer que la fonction $x \mapsto (x^2+x+1)e^{-x}$ est n fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée n-ième.
(on pourra utiliser la formule de Leibniz)

Exercice 11

Montrer que la fonction $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} e^x & \text{si} \quad x < 0 \\ x+1 & \text{si} \quad x \geqslant 0 \end{cases} \end{array}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 12

Montrer que la fonction $x \mapsto x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ est prolongeable par continuité sur $\mathbb{R}$ en une fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$. La fonction f est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$?

Exercice 13

Déterminer les solutions de l'équation différentielle $t^3y' - 2y = 0$ définies sur $\mathbb{R}$.

Exercice 14

On considère une fonction $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ périodique, montrer que f' s'annule une infinité de fois.

Exercice 15

On considère $f, g \in \mathcal{D}([a;b], \mathbb{R})$ avec g' ne s'annulant pas sur $[a;b]$. Montrer que $g(a) \neq g(b)$ et qu'il existe $c \in]a;b[$ tel que $\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \dfrac{f'(c)}{g'(c)}$.
(on pourra considérer la fonction $h : x \mapsto [f(b)-f(a)]g(x) - [g(b)-g(a)]f(x)$)

Exercice 16

Montrer en utilisant l'inégalité des accroissements finis que $x\cos x \leqslant \sin x \leqslant x$ pour tout $x \in [0; \frac{\pi}{2}]$.

Exercice 17

Montrer en utilisant l'inégalité des accroissements finis que $\dfrac{x}{x+1} \leqslant \ln(1+x) \leqslant x$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$.

Exercice 18

On considère l'équation $(E) : (x-1)e^x + x = 0$.

1. Montrer que l'équation (E) admet une unique solution réelle α et l'encadrer par deux entiers consécutifs.
2. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\left\{\begin{array}{rcl} u_0 & = & 0 \\ u_{n+1} & = & \dfrac{e^{u_n}}{e^{u_n}+1} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \end{array}\right.$.
   (a) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers α.
   (b) Montrer que $|u_{n+1}-\alpha| \leqslant \dfrac{1}{4}|u_n-\alpha|$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et en déduire que $|u_n - \alpha| \leqslant \dfrac{1}{4^n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 19

On considère la fonction $f : x \mapsto xe^{-x^2}$.

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ associée à la fonction f par la méthode de Newton vérifie la relation de récurrence $u_{n+1} = \dfrac{2{u_n}^3}{2{u_n}^2 - 1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Montrer que si $u_0 = \pm\dfrac{1}{2}$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.

Exercice 20

On considère la fonction $f : x \mapsto \ln x - 1$.

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ associée à la fonction f par la méthode de Newton vérifie la relation de récurrence $u_{n+1} = u_n(2 - \ln u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Montrer que si $u_0 \in]0; e]$ alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante majorée par e et en déduire qu'elle converge vers e.
3. Montrer que si $u_0 \in]0; e]$ alors $e - u_{n+1} \leqslant (e - u_n)(1 - \ln u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
4. En déduire que si $u_0 \in [1; e]$ alors $e - u_{n+1} \leqslant (e - u_n)^2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Réponses

1) On montre que $\Delta_{f,1}$ admet 5 pour limite à gauche et à droite en 0.

2) $\tilde{f}$ n'est pas dérivable en 0.

3) On montre que si f est paire $\Delta_{f,-a}(h) = -\Delta_{f,a}(-h)$ et que si f est impaire $\Delta_{f,-a}(h) = \Delta_{f,a}(-h)$.

4) $\dfrac{1}{3}$ et $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

5) On utilise un développement limité d'ordre 1 de f en a.

6) $f(a) - af'(a)$.

7) On pose $f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{k=n} e^{kx} = \frac{1-e^{(n+1)x}}{1-e^x}$, la somme cherchée est $f'(x) = \dfrac{ne^{(n+2)x} - (n+1)e^{(n+1)x} + e^x}{(1-e^x)^2}$.
(on traite séparément le cas $x = 0$)

8) On procède par dérivation en remarquant que les fonctions associées ont même dérivée et même valeur en 0.

9) $f^{(n)}(x) = \dfrac{(-1)^n n!}{(1+x)^{n+1}}$ et $g^{(n)}(x) = \dfrac{n!}{(1-x)^{n+1}}$, on remarque que $h = \frac{1}{2}(f+g)$.

10) Pour $n \geqslant 2$, on a $f^{(n)}(x) = \begin{pmatrix} n \\ 0 \end{pmatrix}(x^2+x+1)\times(-1)^n e^{-x} + \begin{pmatrix} n \\ 1 \end{pmatrix}(2x+1)\times(-1)^{n-1}e^{-x} + \begin{pmatrix} n \\ 2 \end{pmatrix} 2 \times (-1)^{n-2}e^{-x} = (-1)^n[x^2 + (1-2n)x + (n-1)^2]e^{-x}$ et la formule est valable également pour $n = 0$ ou $n = 1$.

11) On montre que f est continue en 0, dérivable en 0 avec $f'(0) = 1$ et que f' est continue en 0.

12) Le prolongement par continuité de f est dérivable mais sa dérivée n'est pas continue en 0.

13) $f(t) = \begin{cases} C_1 e^{-\frac{1}{t^2}} & \text{si} \quad t < 0 \\ 0 & \text{si} \quad t = 0 \\ C_2 e^{-\frac{1}{t^2}} & \text{si} \quad t > 0 \end{cases}$.

14) On utilise le théorème de Rolle.

15) On utilise le théorème de Rolle.

16) On remarque que $\sin'(\theta) = \cos(\theta) \in [\cos x; 1]$ pour $\theta \in [0; x]$.

17) On remarque que $\frac{1}{1+c} \in [\frac{1}{1+x}; 1]$ pour $c \in [0; x]$.

18)
1. $\alpha \in [0; 1]$.
2. (a) On utilise le théorème de la limite monotone en remarquant que la suite est croissante et majorée par 1.
   (b) On applique l'inégalité des accroissements finis sur l'intervalle $[u_n; \alpha]$ à la fonction $f : x \mapsto \dfrac{e^x}{e^x+1}$ en remarquant que $|f'(x)| \leqslant \dfrac{1}{4}$ pour $x \in [0; 1]$.

19)
1. On a $u_{n+1} = u_n - \frac{f(u_n)}{f'(u_n)}$.
2. On a $u_n = u_0(-1)^n$.

20)
1. On a $u_{n+1} = u_n - \frac{f(u_n)}{f'(u_n)}$.
2. On étudie les variations de la fonction $g : x \mapsto x(2 - \ln x)$ sur l'intervalle $]0; e]$.
3. On applique l'inégalité des accroissements finis à la fonction g sur l'intervalle $[u_n; e]$.
4. On applique l'inégalité des accroissements finis à la fonction ln sur l'intervalle $[u_n; e]$.