XIV. Applications linéaires

Exercice 1

Montrer que $\phi : \begin{array}{ccc} \mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R} \\ f & \mapsto & \displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \end{array}$ est une forme linéaire. ϕ est-elle injective ? surjective ?

Exercice 2

Montrer qu'une forme linéaire f sur un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E est soit nulle soit surjective.

Exercice 3

Montrer que $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} x \\ x+y \\ x+y+z \end{pmatrix} \end{array}$ est un automorphisme et déterminer son application réciproque.

Exercice 4

Montrer que $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} x+y \\ y+z \end{pmatrix} \end{array}$ est une application linéaire, déterminer son noyau et son image ainsi que leurs dimensions.

Exercice 5

Montrer que $f : P(X) \mapsto XP'(X) - 2P(X)$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$, déterminer son noyau et son image ainsi que leurs dimensions.

Exercice 6

On considère $f, g \in \mathcal{L}(E)$ où E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Montrer que $\text{Im } f \subset \text{Ker } g$ si et seulement si $g \circ f = 0$.

Exercice 7

On considère $f, g \in \mathcal{L}(E)$ où E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Montrer que $f(\text{Ker } g \circ f) = \text{Ker } g \cap \text{Im } f$.

Exercice 8

Montrer que $f : P \mapsto P - P'$ est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ et expliciter son application réciproque. (on pourra utiliser des dérivées successives)

Exercice 9

Étant donné $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$, on définit $p(\overrightarrow{u}) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ x+y \end{pmatrix}$ et $s(\overrightarrow{u}) = \begin{pmatrix} x \\ z \\ y \end{pmatrix}$, montrer que p est un projecteur et s une symétrie et déterminer leurs éléments caractéristiques.

Exercice 10

Dans $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique, on considère $F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \ / \ x+y+z=0 \right\}$ et $G = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$.

Montrer que $F \oplus G = \mathbb{R}^3$ et calculer les coordonnées de l'image d'un vecteur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ quelconque par la projection sur F parallèlement à G puis par la symétrie par rapport à F parallèlement à G.

Exercice 11

Dans $\mathbb{R}_2[X]$, déterminer l'image d'un polynôme $P(X) = aX^2 + bX + c$ quelconque par la symétrie s par rapport à $\text{Vect}(1 + X + X^2)$ parallèlement à $\text{Vect}(1, X)$.

Exercice 12

Montrer que $p \in \mathcal{L}(E)$ est un projecteur si et seulement si $s = 2p - Id$ est une symétrie.

Exercice 13

Montrer que si $s \in \mathcal{L}(E)$ est une symétrie alors $\text{Im}(s + Id) = \text{Ker}(s - Id)$.

Exercice 14

On considère $f \in \mathcal{L}(E)$ où E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, que peut-on dire de $\text{rg}(-f)$ et $\text{rg}(2f)$?

Exercice 15

On considère $f, g \in \mathcal{L}(E)$ où E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, montrer que $|\text{rg } f - \text{rg } g| \leqslant \text{rg}(f+g) \leqslant \text{rg } f + \text{rg } g$.

Exercice 16

On considère $f \in \mathcal{L}(E)$ où E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.
Montrer que $\operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f = E$ si et seulement si $\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f = \left\{\overrightarrow{0}\right\}$.

Exercice 17

Montrer que $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \to & \mathbb{R}_1[X] \\ P(X) & \mapsto & P(X+1)-P(X) \end{array}$ est une application linéaire et déterminer sa matrice de la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ dans la base canonique de $\mathbb{R}_1[X]$.

Exercice 18

Montrer que $f : P(X) \mapsto XP'(X) - 2P(X)$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ et déterminer sa matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.

Exercice 19

Dans l'espace muni d'une base orthonormale directe $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$, déterminer la matrice de la projection orthogonale sur $\mathrm{Vect}(\overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ ainsi que la matrice de la symétrie orthogonale par rapport à $\mathrm{Vect}(\overrightarrow{j})$.

Exercice 20

On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ et on définit l'application $\phi : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto & AM - MA \end{array}$. Montrer que ϕ est une application linéaire et déterminer sa matrice dans la base canonique $(E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Exercice 21

On considère une application $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ est $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Montrer que $\mathcal{B}' = \left(\overrightarrow{e_1}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \overrightarrow{e_2}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \overrightarrow{e_3}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}\right)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et donner la matrice de f dans la base $\mathcal{B}'$.

Exercice 22

Montrer que $P = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est la matrice d'un projecteur p dont on déterminera les éléments caractéristiques.

Exercice 23

Montrer que $S = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est la matrice d'une symétrie s dont on déterminera les éléments caractéristiques.

Exercice 24

On se place dans $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique $\mathcal{B}$. Montrer que $\mathcal{B}' = \left(\overrightarrow{e_1}' \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \overrightarrow{e_2}' \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \overrightarrow{e_3}' \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et donner la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ ainsi que la matrice de passage de $\mathcal{B}'$ à $\mathcal{B}$.

Exercice 25

On considère l'endomorphisme f de matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ dans la base canonique $\mathcal{B} = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ de $\mathbb{R}^3$. Montrer que $\mathrm{Ker} f$ est de dimension 1 et en déterminer une base $(\overrightarrow{e_1}')$, montrer que $\mathrm{Im} f$ est de dimension 2 et en déterminer une base $(\overrightarrow{e_2}', \overrightarrow{e_3}')$, montrer que $\mathcal{B}' = (\overrightarrow{e_1}', \overrightarrow{e_2}', \overrightarrow{e_3}')$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et déterminer la matrice M' de f dans celle-ci.

Exercice 26

On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. Montrer qu'il existe une matrice P inversible telle que $M = PDP^{-1}$ avec $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ et en déduire M^n pour $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 27

Déterminer le rang de la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Exercice 28

On note $M_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda & -1 & -1 \\ -1 & \lambda & -1 \\ -1 & -1 & \lambda \end{pmatrix}$ pour $\lambda \in \mathbb{R}$. Déterminer le rang de M_λ en fonction de λ.

Réponses

1) On utilise la linéarité de l'intégrale. ϕ est surjective mais pas injective.

2) Si il existe $\overrightarrow{u} \in E$ tel que $f(\overrightarrow{u}) = \alpha \neq 0$ alors pour tout $x \in \mathbb{K}$ on a par linéarité $f\left(\frac{x}{\alpha}\overrightarrow{u}\right) = x$.

3) f a pour application réciproque $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y-x \\ z-y \end{pmatrix}$.

4) $\text{Ker } f = \text{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ et $\text{Im } f = \mathbb{R}^2$.

5) Pour $n \geqslant 2$, $\text{Ker } f = \text{Vect}(X^2)$ et $\text{Im } f = \text{Vect}(1, X, X^3, \ldots, X^n)$.

6) On procède par double inclusion.

7) On procède par double inclusion.

8) On remarque que si P est non nul $P - P'$ est non nul donc $\text{Ker } f = \{0\}$ et f est injective donc bijective car $\mathbb{R}_n[X]$ est de dimension finie. On remarque que si $P + P' = Q$ alors $P = Q + Q' + Q'' + \cdots + Q^{(n)}$.

9) $p \circ p = p$ donc p est un projecteur sur $\text{Im } p$ plan vectoriel d'équation $x + y - z = 0$ parallèlement à $\text{Ker } p$ droite vectorielle engendrée par le vecteur $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.
$s \circ s = Id$ donc s est une symétrie par rapport à $\text{Ker}(s - Id)$ plan vectoriel d'équation $y - z = 0$ parallèlement à $\text{Ker}(s - Id)$ droite vectorielle engendrée par le vecteur $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

10) $\begin{pmatrix} -y-z \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -x-2y-2z \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

11) On a $aX^2 + bX + c = a(1 + X + X^2 - 1 - X) + bX + c = a(1 + X + X^2) + (b-a)X + (c-a)$ d'où $s(aX^2 + bX + c) = a(1 + X + X^2) - (b-a)X - (c-a) = aX^2 + (2a-b)X + (2a-c)$.

12) On a $s \circ s = 2p \circ (2p - Id) - (2p - Id) = 4(p \circ p - p) + Id$ donc $s \circ s = Id$ équivaut à $p \circ p = p$.

13) On a $(s - Id) \circ (s + Id) = 0$ donc $\text{Im}(s + Id) \subset \text{Ker}(s - Id)$ et si $s(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{u}$ alors $\overrightarrow{u} = (s + Id)(\frac{1}{2}\overrightarrow{u})$ d'où $\text{Ker}(s - Id) \subset \text{Im}(s + Id)$.

14) $\text{rg}(-f) = \text{rg}(2f) = \text{rg } f$.

15) On remarque que $\text{Im}(f + g) \subset \text{Im } f + \text{Im } g$ puis que $f = (f + g) + (-g)$.

16) D'après le théorème du rang, $\dim(\text{Im } f) = \dim E - \dim(\text{Ker } f)$ d'où si $\text{Ker } f \cap \text{Im } f = \left\{\overrightarrow{0}\right\}$, $\dim(\text{Ker } f + \text{Im } f) = \dim(\text{Ker } f) + \dim(\text{Im } f) - \dim(\text{Ker } f \cap \text{Im } f) = \dim(E)$.

17) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

18) $$\begin{pmatrix} -2 & & & & & \\ & -1 & & (0) & & \\ & & 0 & & & \\ & & & 1 & & \\ & (0) & & & \ddots & \\ & & & & & n-2 \end{pmatrix}.$$

19) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

20) $\begin{pmatrix} 0 & -3 & 2 & 0 \\ -2 & -3 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

21) $\underset{\mathcal{B}'}{\mathcal{M}at}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

22) $P^2 = P$ donc p est une projection sur $\operatorname{Im} p = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \ / \ x+y+z=0 \right\}$ parallèlement à $\operatorname{Ker} p = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \ / \ y=z=0 \right\}$.

23) $S^2 = I_3$ donc s est une symétrie par rapport à $\operatorname{Ker}(s-Id) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \ / \ x+y+z=0 \right\}$ parallèlement à $\operatorname{Ker}(s+Id) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \ / \ y=z=0 \right\}$.

24) $\underset{\mathcal{B}',\mathcal{B}}{\mathcal{M}at}\ Id = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $\underset{\mathcal{B},\mathcal{B}'}{\mathcal{M}at}\ Id = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

25) On a $\overrightarrow{e_1}' \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{e_2}' \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{e_3}' \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $M' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

26) $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $M^n = \begin{pmatrix} 1 & 2^n-1 & 3^n-2^n \\ 0 & 2^n & 3^n-2^n \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}$.

27) $\operatorname{rg} M = 2$.

28) Le rang de M_λ vaut 1 si $\lambda = -1$, 2 si $\lambda = 2$ et 3 sinon.