XV. Intégration

Exercice 1

Déterminer $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{k=n} \frac{1}{n+k}$ en étudiant les sommes de Riemann de la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{1+x}$ sur l'intervalle $[0;1]$.

Exercice 2

Montrer que $F : x \mapsto \ln|1+x|$ est une primitive de $f : x \mapsto \frac{1}{1+x}$ sur $]-\infty;-1[$ et sur $]-1;+\infty[$.

Exercice 3

Déterminer une primitive sur $[0;\frac{\pi}{2}[$ de la fonction tangente.

Exercice 4

Déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $f : x \mapsto e^x \sin x$.
(on pourra la chercher sous la forme $F : x \mapsto (\lambda \sin x + \mu \cos x)e^x$)

Exercice 5

Déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $f : x \mapsto e^x(\sin x)^2$.
(on pourra linéariser)

Exercice 6

Déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $f : x \mapsto \frac{1+x}{1+x^2}$.

Exercice 7

On considère la fonction $f : x \mapsto \frac{1+x+x^2}{1+x+x^2+x^3}$, montrer qu'il existe trois réels a, b et c tels que $f(x) = \frac{ax+b}{1+x^2} + \frac{c}{1+x}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et en déduire une primitive de f sur $]-\infty;-1[$ et sur $]-1;+\infty[$.

Exercice 8

Calculer $\int_0^{\frac{\pi}{3}} (\tan t)^2 \, \mathrm{d}t$.

Exercice 9

Calculer $\int_0^3 |t^2 - 3t + 2| \, \mathrm{d}t$.

Exercice 10

Calculer $\displaystyle\int_0^1 (1+t)\sqrt{t}\ \mathrm{d}t$.

Exercice 11

Calculer $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{t}{(\cos t)^2}\ \mathrm{d}t$. (on pourra effectuer une intégration par parties)

Exercice 12

Calculer $\displaystyle\int_0^1 t^3 e^{t^2}\ \mathrm{d}t$. (on pourra effectuer une intégration par parties)

Exercice 13

Déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction arctangente. (on pourra effectuer une intégration par parties)

Exercice 14

Calculer $\displaystyle\int_1^e t(\ln t)^4\ \mathrm{d}t$. (on pourra effectuer des intégrations par parties successives)

Exercice 15

Calculer $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^2(\cos t)^3\ \mathrm{d}t$. (on pourra utiliser le changement de variable $x = \sin t$)

Exercice 16

Calculer $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}t}{1+\cos t}$. (on pourra utiliser le changement de variable $x = \tan \frac{t}{2}$)

Exercice 17

Exprimer $1+\tan\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)$ en fonction de $\tan x$ et en déduire $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\tan t)\ \mathrm{d}t$.
(on pourra utiliser un changement de variable)

Exercice 18

Démontrer que $x - \dfrac{x^2}{2} \leqslant \ln(1+x) \leqslant x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3}$ pour $x \in \mathbb{R}_+$ en utilisant la formule de Taylor-Lagrange avec reste intégral.

Exercice 19

Déterminer le développement limité à l'ordre n en $x = 0$ de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$ en utilisant la formule de Taylor-Young.

Exercice 20

Déterminer un équivalent en 0 de la fonction $f : x \mapsto x(2+\cos x) - 3\sin x$.

Exercice 21

Étudier la limite en 0 de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1-\cos x}{1-\sqrt{1+x^2}}$.

Exercice 22

Déterminer le développement limité à l'ordre n en $x=-1$ de $x \mapsto 1+x+x^2+x^3$.
(on pourra utiliser le changement de variable $X = x+1$)

Exercice 23

Déterminer le développement limité à l'ordre 3 en $x=1$ de $x \mapsto \dfrac{1+x^3}{1+x+x^2}$.
(on pourra utiliser le changement de variable $X = x-1$)

Exercice 24

Étudier la limite en 1 de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{\ln x}{1-\sqrt{x}}$.
(on pourra utiliser le changement de variable $X = x-1$)

Exercice 25

Montrer que la courbe représentative $\mathcal{C}$ de la fonction $f : x \mapsto x\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$ admet une asymptote oblique $\mathcal{T}$ en $+\infty$ puis étudier les positions relatives de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{T}$ au voisinage de $+\infty$.
(on pourra utiliser le changement de variable $X = \dfrac{1}{x}$ et calculer un développement limité)

Exercice 26

Montrer que la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{\sin x} - \dfrac{1}{x}$ se prolonge par continuité en 0 en une fonction dérivable en 0 et déterminer $f(0)$ et $f'(0)$.

Exercice 27

Déterminer le développement limité à l'ordre 3 en $x=0$ de la fonction $x \mapsto \sqrt{1+\sin x}$.

Exercice 28

Déterminer le développement limité à l'ordre 5 de la fonction arccos en 0.
(on pourra procéder par intégration)

Réponses

1) $\ln 2$.

2) Si $x < -1$ alors $F(x) = \ln(-1-x)$ d'où $F'(x) = \dfrac{-1}{-1-x} = f(x)$.

3) $x \mapsto -\ln(\cos x)$.

4) $F(x) = \dfrac{1}{2}(\sin x - \cos x)e^x$.

5) $F(x) = \dfrac{1}{10}(5 - \cos 2x - 2\sin 2x)e^x$.

6) $F(x) = \arctan x + \dfrac{1}{2}\ln(1+x^2)$.

7) $F(x) = \dfrac{1}{4}\ln(1+x^2) + \dfrac{1}{2}\arctan x + \dfrac{1}{2}\ln|1+x|$.

8) $\sqrt{3} - \dfrac{\pi}{3}$.

9) $\dfrac{11}{6}$.

10) $\dfrac{16}{15}$.

11) $\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{1}{2}\ln 2$.

12) $\dfrac{1}{2}$, en remarquant que $t^3 e^{t^2} = \dfrac{1}{2}t^2 \times 2te^{t^2}$.

13) $x \mapsto x\ \arctan x - \dfrac{1}{2}\ln(1+x^2)$.

14) $\dfrac{e^2-3}{4}$ en remarquant que $I_n = \displaystyle\int_1^e t(\ln t)^n \,\mathrm{d}t$ vérifie la relation de récurrence $I_n = \dfrac{1}{2}(e^2 - nI_{n-1})$.

15) $\dfrac{2}{15}$.

16) 1.

17) En posant $x = \frac{\pi}{4} - t$ on obtient $I = \dfrac{1}{4}\pi\ln 2 - I$ d'où $I = \dfrac{1}{8}\pi\ln 2$.

18) On remarque que $\ln(1+x) - x + \dfrac{x^2}{2} = \displaystyle\int_0^x \dfrac{(x-t)^2}{2}\ln^{(3)}(1+t)\,\mathrm{d}t \geqslant 0$ et que $\ln(1+x) - x + \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^3}{3} = \displaystyle\int_0^x \dfrac{(x-t)^3}{6}\ln^{(4)}(1+t)\,\mathrm{d}t \leqslant 0$.

19) $\dfrac{1}{\sqrt{1-x}} \underset{0}{=} 1 + \displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} \dfrac{1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times (2k-1)}{k!\ 2^k} x^k \ + o(x^n)$.

20) $f(x) \underset{0}{\sim} \dfrac{x^5}{60}$.

21) $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x) = -1$.

22) $2(x+1) - 2(x+1)^2 + (x+1)^3$ si $n \geqslant 3$.

23) $\dfrac{2}{3} + \dfrac{1}{3}(x-1) + \dfrac{4}{9}(x-1)^2 - \dfrac{2}{9}(x-1)^3 + o((x-1)^3)$.

24) $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x) = -2$.

25) On montre que $f(x) = \dfrac{1}{X} + 1 + \dfrac{1}{2}X + o(X) = x + 1 + \dfrac{1}{2x} + o\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

26) $\dfrac{1}{\sin x} - \dfrac{1}{x} \underset{0}{=} \dfrac{1}{6}x + o(x)$ donc $f(0) = 0$ et $f'(0) = \dfrac{1}{6}$.

27) $\sqrt{1+\sin x} \underset{0}{=} 1 + \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{8}x^2 - \dfrac{1}{48}x^3 + o(x^3)$.

28) $\arccos x \underset{0}{=} \dfrac{\pi}{2} - x - \dfrac{x^3}{6} - \dfrac{3x^5}{40} + o(x^6)$.