# XVI. Probabilités

## Exercice 1

On lance successivement un dé cubique jusqu'à ce que le total des nombres obtenus soit supérieur ou égal à 3.

Déterminer l'univers de cette expérience aléatoire.

## Exercice 2

On considère une urne contenant $N$ boules blanches et $N$ boules noires indiscernables et on tire successivement sans remise toutes les boules de l'urne.

Déterminer le nombre d'issues de cette expérience aléatoire.

## Exercice 3

Déterminer le nombre d'anagrammes du mot probabilité.

## Exercice 4

On considère un dé cubique déséquilibré tel que la probabilité d'apparition d'une face soit proportionnelle au nombre qu'elle porte.

Déterminer la probabilité d'apparition de chacune des faces.

## Exercice 5

On considère deux dés cubiques équilibrés, est-il avantageux de parier sur l'apparition d'au moins un six lorsque l'on lance quatre fois un dé et sur l'apparition d'au moins un double six lorsque l'on lance vingt-quatre fois deux dés ?

## Exercice 6

On considère trois verres opaques retournés dont l'un seulement cache une pièce d'or. Après que le joueur a choisi un des verres, le maître du jeu retourne parmi les deux verres non désignés un verre ne contenant pas la pièce d'or et propose au joueur de modifier son choix. Le joueur doit-il confirmer ou infirmer sa réponse ?

## Exercice 7

On tire cinq cartes au hasard dans un jeu de 52 cartes.
Quelle est la probabilité que cette main soit un Full(trois cartes de même rang et deux cartes de même rang) ?

## Exercice 8

Déterminer dans un groupe de 30 personnes, la probabilité que deux au moins aient la même date d'anniversaire. (on ne prend pas en compte l'existence du 29 février)
En calculer une valeur approchée. (on pourra approcher un produit de $n$ nombres par la $n$-ième puissance de leur moyenne arithmétique)

## Exercice 9

On considère la statistique suivante* : Sur 100 000 femmes battues (par leur conjoint), 45 sont tuées dont 40 par leur conjoint.
Déterminer la probabilité qu'une femme battue soit tuée par son conjoint ainsi que la probabilité qu'une femme battue ait été tuée par son conjoint sachant qu'elle a été tuée.
*Penser le risque : apprendre à vivre dans l'incertitude par Gerd Gigerenzer

## Exercice 10

On considère une maladie qui touche 2% de la population. Le test de dépistage de cette maladie est positif avec une probabilité de 95% si l'individu est malade et est positif avec une probabilité de 3% si l'individu est sain.
Déterminer la probabilité pour un individu d'être malade si son test est positif et en donner une valeur approchée au centième.

## Exercice 11

On lance successivement un dé cubique jusqu'à ce que le total des nombres obtenus soit supérieur ou égal à 3.
Déterminer l'espérance du nombre de lancers réalisés.

## Exercice 12

On considère un trousseau de 5 clefs dont deux permettent d'ouvrir une porte donnée et on teste les clefs au hasard successivement jusqu'à l'ouverture de la porte.
Déterminer l'espérance et la variance du nombre d'essais nécessaires.

## Exercice 13

On considère une urne contenant 5 boules blanches et 5 boules noires indiscernables et on tire successivement sans remise toutes les boules de l'urne.
Déterminer l'espérance du rang d'obtention de la première boule noire.

## Exercice 14

On considère une variable aléatoire $X$ sur un espace probabilisé fini à valeurs dans $[0;1]$, montrer que $E(X^2) \leqslant E(X)$ et en déduire que $V(X) \leqslant \frac{1}{4}$.

## Exercice 15

On considère un devoir de Mathématiques de moyenne 8 et d'écart-type 2.

Déterminer le plus petit intervalle centré autour de la moyenne tel que la probabilité d'appartenance à celui-ci de la note d'une copie tirée au hasard soit supérieure à 75%.

## Exercice 16

On considère une urne contenant une boule blanche et une boule noire indiscernables et on effectue des tirages successifs en remettant après chaque tirage la boule tirée et en ajoutant une boule supplémentaire de la même couleur.

Déterminer la loi de probabilité du nombre de boules blanches présentes dans l'urne après $N$ tirages.

## Exercice 17

On effectue $N$ tirages successifs avec remise dans une urne contenant deux boules blanches et trois boules noires indiscernables. On gagne $g$ points par boule blanche tirée et on perd deux points par boule noire tirée.

Quelle valeur de $g$ faut-il choisir pour que l'espérance du gain soit nulle ? (jeu équitable)

## Exercice 18

On tire une boule dans une urne contenant $k$ boules portant le numéro $k$ pour tout $k \in [\![1;9]\!]$.

Déterminer l'espérance et la variance du numéro de la boule tirée.

## Exercice 19

On lance successivement une pièce déséquilibrée et on note $p$ la probabilité d'apparition de Pile et $X$ la proportion de Pile obtenus après $N$ lancers.

Calculer l'espérance et la variance de $X$ puis déterminer $N$ pour que $X$ soit une valeur approchée de $p$ au dixième avec une probabilité de 90%.

# Réponses

**1)** $\Omega = \{(1,1,1),(1,1,2),(1,1,3),(1,1,4),(1,1,5),(1,1,6),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6),(3),(4),(5),(6)\}$.

**2)** $\binom{2N}{N}$.

**3)** $\dfrac{11!}{2!\,2!} = 9\ 979\ 200$.

**4)** $P(\{k\}) = \dfrac{k}{21}$.

**5)** $1 - \left(\frac{5}{6}\right)^4 > \frac{1}{2}$ et $1 - \left(\frac{35}{36}\right)^{24} < \frac{1}{2}$.

**6)** Dans seulement un cas sur trois équiprobables, le joueur perd en modifiant son choix.

**7)** $\dfrac{13 \times \binom{4}{3} \times 12 \times \binom{4}{2}}{\binom{52}{5}} = \dfrac{6}{4165}$.

**8)** $1 - \dfrac{\frac{365!}{335!}}{365^{30}} \simeq 1 - \left(\dfrac{336 + 365}{2 \times 365}\right)^{30} \simeq \dfrac{7}{10}$.

**9)** $\dfrac{1}{2500}$ et $\dfrac{8}{9}$.

**10)** $P_+(M) = \dfrac{P_M(+) \times P(M)}{P_M(+) \times P(M) + P_{\overline{M}}(+) \times P(\overline{M})} = \dfrac{95\% \times 2\%}{95\% \times 2\% + 3\% \times 98\%} \simeq 39\%$.

**11)** $1 \times \dfrac{2}{3} + 2 \times \dfrac{11}{36} + 3 \times \dfrac{1}{36} = \dfrac{49}{36}$.

**12)** $1 \times \frac{2}{5} + 2 \times \frac{3}{5} \times \frac{1}{2} + 3 \times \frac{3}{5} \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} + 4 \times \frac{3}{5} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = 2$ et $1$.

**13)** $\dfrac{1 \times \binom{9}{4} + 2 \times \binom{8}{4} + 3 \times \binom{7}{4} + 4 \times \binom{6}{4} + 5 \times \binom{5}{4} + 6 \times \binom{4}{4}}{\binom{10}{5}} = \dfrac{11}{6}$.

**14)** $V(X) = E(X^2) - E(X)^2 \leqslant E(X) - E(X)^2 \leqslant \frac{1}{4}$ car $E(X) \in [0;1]$.

**15)** $[4;12]$ en remarquant que $P(|X-8| \leqslant a) \leqslant \frac{4}{a^2} \leqslant 25\%$.

**16)** $P(X = k) = \dfrac{1}{N+1}$ pour tout $k \in [\![1; N+1]\!]$ en procédant par récurrence sur $N$.

**17)** $(g+2) \times \dfrac{2}{5}N - 2N = 0 \Leftrightarrow g = 3$.

**18)** $\dfrac{19}{3}$ et $\dfrac{44}{9}$.

**19)** $E(X) = \frac{1}{N} \times Np = p$, $V(X) = \frac{1}{N^2}Np(1-p) = \frac{p(1-p)}{N}$ et $N = 250$ en remarquant que $P(|X-p| \geqslant \frac{1}{10}) \leqslant \frac{100p(1-p)}{N} \leqslant \frac{25}{N}$.