I. Pratique calculatoire

1 Inéquations

Propriété 1. *On ne change pas les solutions d'une inéquation :*
- *en additionnant ou en soustrayant un même nombre aux deux membres de l'inéquation,*
- *en multipliant ou en divisant par un même nombre* ***strictement positif*** *les deux membres de l'inéquation,*
- *en multipliant ou en divisant par un même nombre strictement négatif les deux membres de l'inéquation à condition de* ***changer l'ordre*** *de l'inéquation.*

Exemple 1. *Résolution de l'inéquation* $(E)\ :\ 2x+3 \leqslant 5x-4$

$$\begin{array}{rcl}
2x+3-3 & \leqslant & 5x-4-3 \\
2x & \leqslant & 5x-7 \\
2x-5x & \leqslant & 5x-7-5x \\
-3x & \leqslant & -7 \\
\dfrac{-3x}{-3} & \geqslant & \dfrac{-7}{-3} \\
x & \geqslant & \dfrac{7}{3}
\end{array}$$

L'ensemble des solutions de l'inéquation (E) *est l'ensemble* $S = \left[\dfrac{7}{3}; +\infty\right[$.

Exercice 1. *Résoudre l'inéquation* $3x+2 > 5x-1$.

Exercice 2. *Résoudre les inéquations suivantes :*

$$\begin{array}{lcccc}
(E_1) & : & 1+x & \leqslant & x \\
(E_2) & : & (1+x)^2 & \leqslant & x^2
\end{array}$$

Que peut-on en conclure ?

Définition 1. Tableau de signes d'une fonction
Soit f une fonction de la variable x, on appelle **tableau de signes** *de f un tableau donnant le signe de $f(x)$ en fonction de x ainsi que les valeurs de x pour lesquelles $f(x)=0$.*

Exemple 2. *tableau de signes de* $f(x) = (3x-1)(x-4)$ *:*

x	$-\infty$		$\frac{1}{3}$		4		$+\infty$
$3x-1$		$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	
$x-4$		$-$	$\vert$	$-$	0	$+$	
$(3x-1)(x-4)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Exercice 3. *Résoudre l'inéquation* $(E)\ :\ \dfrac{3x-5}{2-x} \leqslant 0$ *au moyen d'un tableau de signes.*

Définition 2. Valeur absolue d'un nombre réel
On appelle **valeur absolue d'un réel** x : $\boxed{|x| = \begin{cases} x & si\ x \geqslant 0 \\ -x & si\ x \leqslant 0 \end{cases}}$.

Propriété 2. *Pour tous réels x et y on a :*
- $\boxed{|x| = \sqrt{x^2}}$
- $\boxed{|xy| = |x| \times |y|}$

Exercice 4. *On pose $x = 3$ et $y = -2$, calculer $|x+y|$ et $|x|+|y|$.*

Propriété 3. Inégalité triangulaire
Pour tous réels x et y, on a $\boxed{|x+y| \leqslant |x| + |y|}$.

Exercice 5. *Représenter graphiquement la fonction $f : x \mapsto |1-2x|$.*

Exercice 6. *Résoudre les inéquations suivantes :*

$$\begin{array}{lcrcr} (E_1) & : & 3x-2 & > & 5 \\ (E_2) & : & 3x-2 & < & -5 \end{array}$$

En déduire l'ensemble des solutions de l'inéquation $(E) \ : \ |3x-2| > 5$.

2 Équation du second degré

Théorème 1. *L'équation $ax^2+bx+c=0$ avec a,b,c trois réels et $a \neq 0$ admet :*
- *Si $\Delta = b^2-4ac > 0$, deux solutions réelles distinctes* $\boxed{x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}}$ *et* $\boxed{x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}}$

  de plus $\boxed{ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2)}$.
- *Si $\Delta = 0$, une solution réelle double* $\boxed{x_0 = \dfrac{-b}{2a}}$ *de plus* $\boxed{ax^2+bx+c = a(x-x_0)^2}$.
- *Si $\Delta = b^2-4ac < 0$, aucune solution réelle.*

Exercice 7. *Factoriser le trinôme du second degré $3x^2+3x-6$ puis en déduire son tableau de signes.*

Propriété 4. Signe d'un trinôme du second degré
Le signe d'un trinôme du second degré ax^2+bx+c avec a,b,c trois réels et $a \neq 0$ est :
- *celui de a quand $\Delta \leqslant 0$,*
- *celui de a à l'extérieur des racines (et le signe contraire à l'intérieur des racines) quand $\Delta > 0$.*

Exercice 8. *Déterminer le tableau de signes du trinôme du second degré* $4x^2+2x-1$.

3 Calcul de limites

Propriété 5. Opérations sur les limites

$\lim\limits_{x\to} u(x)$	l	l	l	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{x\to} v(x)$	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to}[u(x)+v(x)]$	$l+l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	?

$\lim\limits_{x\to} u(x)$	l	$l\neq 0$	0	∞
$\lim\limits_{x\to} v(x)$	l'	∞	∞	∞
$\lim\limits_{x\to}[u(x)\times v(x)]$	$l\times l'$	∞	?	∞

Le signe de la limite s'obtenant au moyen de la règle des signes pour la multiplication.

$\lim\limits_{x\to} u(x)$	l	$l\neq 0$	∞	l	∞	0
$\lim\limits_{x\to} v(x)$	$l'\neq 0$	0	l'	∞	∞	0
$\lim\limits_{x\to} \dfrac{u(x)}{v(x)}$	$\dfrac{l}{l'}$	∞	∞	0	?	?

Le signe de la limite s'obtenant au moyen de la règle des signes pour la division.

Exercice 9. *Calculer les limites en* 1 *et en* $+\infty$ *de la fonction* $f : x \mapsto \dfrac{x^2+1}{1-x}$.

Exercice 10. *Calculer* $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \sqrt{1-\dfrac{1}{x}}$.

Exercice 11. *Déterminer* $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sin x}{x}$. *(on pourra procéder par encadrement)*

Propriété 6. Croissances comparées

- $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0}$
- $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{e^x} = 0}$

Corollaire 1.

- $\boxed{\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x\ln x = 0}$
- $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0}$

Exercice 12. *Déterminer* $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x^2+1}$.

Exercice 13. *Déterminer* $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x^2\ln(2x)$.

4 Calcul de dérivées et primitives

Théorème 2. **Dérivées des fonctions usuelles**

$f(x)$	*ensemble de définition*	*intervalle(s) de dérivabilité*	$f'(x)$
Cte	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	0
$ax+b$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	a
x^2	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$2x$
x^3	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$3x^2$
$x^n \quad , \quad n\in\mathbb{N}^*$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	nx^{n-1}
$\dfrac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$	$\mathbb{R}^*_-$ *et* $\mathbb{R}^*_+$	$-\dfrac{1}{x^2}$
$\dfrac{1}{x^n}=x^{-n} \quad , \quad n\in\mathbb{N}^*$	$\mathbb{R}^*$	$\mathbb{R}^*_-$ *et* $\mathbb{R}^*_+$	$-\dfrac{n}{x^{n+1}}=-nx^{-n-1}$
$\sqrt{x}=x^{\frac{1}{2}}$	$\mathbb{R}_+$	$\mathbb{R}^*_+$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}=\dfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$
$\sin x$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\cos x$
$\cos x$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$-\sin x$
e^x	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	e^x
$\ln x$	$\mathbb{R}^*_+$	$\mathbb{R}^*_+$	$\dfrac{1}{x}$

Exercice 14. *Calculer la dérivée de la fonction* $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^5}$.

Théorème 3. **Dérivées et opérations**

- *Si* u *et* v *sont deux fonctions dérivables alors la fonction* $u+v$ *est dérivable et* $\boxed{(u+v)'=u'+v'}$.
- *Si* u *est une fonction dérivable et* k *un nombre réel alors la fonction* ku *est dérivable et* $\boxed{(ku)'=k\times u'}$.
- *Si* u *et* v *sont deux fonctions dérivables alors la fonction* uv *est dérivable et* $\boxed{(uv)'=u'v+uv'}$.
- *Si* u *est une fonction dérivable ne s'annulant pas alors la fonction* $\dfrac{1}{u}$ *est dérivable et* $\boxed{\left(\dfrac{1}{u}\right)'=-\dfrac{u'}{u^2}}$.
- *Si* u *et* v *sont deux fonctions dérivables avec* v *ne s'annulant pas alors la fonction* $\dfrac{u}{v}$ *est dérivable et* $\boxed{\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}}$.

Exercice 15. *Calculer la dérivée de la fonction* $f : x \mapsto 5e^x-4x^3+2$.

Exercice 16. *Calculer les dérivées des fonctions* $f : x \mapsto \dfrac{x^2-1}{x^2+1}$ *et* $g : x \mapsto \dfrac{3x^2+1}{x^2+1}$.

Théorème 4. Dérivée d'une composée

- *Si u est une fonction dérivable et n un entier positif alors la fonction u^n est dérivable et :*

$$\boxed{(u^n)' = nu^{n-1} \times u'}$$

- *Si u est une fonction dérivable alors la fonction e^u est dérivable et :*

$$\boxed{(e^u)' = e^u \times u'}$$

- *Si u est une fonction dérivable alors la fonction $\sin u$ est dérivable et :*

$$\boxed{(\sin u)' = (\cos u) \times u'}$$

- *Si u est une fonction dérivable alors la fonction $\cos u$ est dérivable et :*

$$\boxed{(\cos u)' = -(\sin u) \times u'}$$

- *Si u est une fonction dérivable strictement positive alors la fonction $\sqrt{u}$ est dérivable et :*

$$\boxed{(\sqrt{u})' = \frac{1}{2\sqrt{u}} \times u'}$$

- *Si u est une fonction dérivable strictement positive alors la fonction $\ln u$ est dérivable et :*

$$\boxed{(\ln u)' = \frac{1}{u} \times u'}$$

Exercice 17. *Calculer les dérivées des fonctions $f : x \mapsto (x^2 - 1)^5$ et $g : x \mapsto e^{x^2-1}$.*

Exercice 18. *Calculer la dérivée de la fonction $f : x \mapsto (2x^2 - 2x + 1)e^{2x}$.*

Définition 3. *Soit f une fonction, on appelle* **primitive** *de la fonction f toute fonction F dérivable telle que $F' = f$.*

Exercice 19. *Déterminer une primitive de la fonction $f : x \mapsto 6x^2 - 5x + 7$.*

Exercice 20. *Déterminer une primitive sur $]0; +\infty[$ de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x^3}$.*
(on pourra chercher F sous la forme $F(x) = C \times \dfrac{1}{x^2}$)

5 Sommes et produits

Propriété 7. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$, alors* $\boxed{1+2+3+\cdots+n = \dfrac{n(n+1)}{2}}$.

Exercice 21. *Calculer* $1+2+3+\cdots+100$.

Propriété 8. *Soit $n \in \mathbb{N}$ et q un nombre réel différent de 1, alors* $\boxed{q^0+q^1+q^2+\cdots+q^n = \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}}$.

Exercice 22. *Calculer* $2^1+2^2+2^3+\cdots+2^9$.

Définition 4. Symbole factorielle
Étant donné un entier naturel n on définit sa **factorielle** *$n!$ par :*

$$\boxed{\begin{array}{rcl} 0! & = & 1 \\ n! & = & 1\times 2\times 3\times\cdots\times n \end{array}}$$

Exercice 23. *Calculer* $\dfrac{6!}{(3!)^2}$.

Propriété 9. Identités remarquables
Si a et b sont deux nombres réels (ou complexes), alors :

$$\boxed{(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2} \qquad \boxed{(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2} \qquad \boxed{a^2-b^2 = (a-b)(a+b)}$$

Exercice 24. *Développer et réduire $(a+b)^3$ et $(a-b)^3$.*
(on ordonnera suivant les puissances croissantes de b)

Exercice 25. *Développer et réduire $(a+b)^4$ et $(a-b)^4$.*
(on ordonnera suivant les puissances croissantes de b)

Propriété 10. Triangle de Pascal
Les coefficients du développement de $(a+b)^n$ dans l'ordre des puissances croissantes de b s'obtiennent à l'aide du tableau suivant où les lignes se commencent et se terminent par 1 et chaque coefficient s'obtient au moyen d'une somme de coefficients de la ligne précédente :

$$\begin{array}{lllll}
1 & & & & \\
1 & 1 & & & \\
& \searrow\downarrow & & & \\
1 & 2 & 1 & & \\
& \searrow\downarrow & \searrow\downarrow & & \\
1 & 3 & 3 & 1 & \\
& \searrow\downarrow & \searrow\downarrow & \searrow\downarrow & \\
1 & 4 & 6 & 4 & 1
\end{array}$$

Exercice 26. *Compléter le triangle de Pascal afin d'obtenir le développement de $(a+b)^7$.*

Exercices supplémentaires

Exercice 27

Résoudre l'inéquation $-7x + 3 \leqslant 2(x - 1)$.

Exercice 28

Déterminer le tableau de signes de $f(x) = \dfrac{(1 - 2x)(3x - 2)}{(x + 5)}$.

Exercice 29

Résoudre l'inéquation $\dfrac{1 - 3x}{x + 2} < 0$.

Exercice 30

Résoudre l'inéquation $|2x - 3| \leqslant 5$.

Exercice 31 ($\star$)

Résoudre l'inéquation $|3x - 5| \leqslant 2x + 1$.

Exercice 32 ($\star\star$)

Résoudre l'inéquation $|x + 1| + |x - 1| \leqslant x + 2$.

Exercice 33

Résoudre l'équation $-3x^2 - x + 2 = 0$.

Exercice 34 ($\star$)

Résoudre l'équation $5x^2 + \dfrac{2}{3}x - 1 = 0$.

Exercice 35

Résoudre l'inéquation $x^2 < x + 2$.

Exercice 36

Déterminer l'ensemble de définition de la fonction $f : x \mapsto \ln(x^2 - x)$.

Exercice 37

Résoudre l'inéquation $\dfrac{x^2 + x}{x^2 - 2} \leqslant 0$.

Exercice 38 ($\star$)

Déterminer la valeur de m pour que l'équation $-3x^2 + 6x - 4m = 0$ admette une unique solution et la calculer dans ce cas.

Exercice 39 ($\star$)

Résoudre l'inéquation $\dfrac{x^2-2x-3}{x^2+x-2} \geqslant 0$.

Exercice 40 ($\star\star$)

Résoudre l'inéquation $\dfrac{x-1}{2x} > \dfrac{x+5}{2-x}$.

Exercice 41 ($\star\star$)

Résoudre le système $\left\{\begin{array}{rcl} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y} & = & \dfrac{4}{15} \\ xy & = & 60 \end{array}\right.$.

Exercice 42

Déterminer $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \dfrac{\sqrt{x+1}}{\sin x}$, $\lim\limits_{x\to 1} e^{-(\ln x)^2}$, $\lim\limits_{x\to -\infty} \ln(\sqrt{x^2+1}-x)$ et $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

Exercice 43

Déterminer $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{2x^2-1}{3x+1}$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{1}{x-\sqrt{x}}$.

Exercice 44 ($\star$)

Déterminer $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-3x+2}{x^2-1}$.

Exercice 45 ($\star$)

Déterminer $\lim\limits_{x\to +\infty} (\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2+2})$.

Exercice 46 ($\star$)

Déterminer $\lim\limits_{x\to 0} xe^{-\frac{1}{x^2}}$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln(x^2+1)}{x}$.

Exercice 47

Déterminer les dérivées des fonctions $f_1 : x \mapsto \dfrac{x+2}{x^2+1}$, $f_2 : x \mapsto (\sin x - \cos x)e^x$ et $f_3 : x \mapsto \dfrac{\sin x}{\ln x}$.

Exercice 48 ($\star$)

Déterminer les dérivées des fonctions $f_1 : x \mapsto xe^{x^2-1}$, $f_2 : x \mapsto x\sqrt{x^2+2}$ et $f_3 : x \mapsto x(x^2+1)^7$.

Exercice 49 ($\star\star$)

Déterminer la dérivée troisième f'''de la fonction $f : x \mapsto (x^2-3x+3)e^{2x}$.

Exercice 50

Déterminer une primitive de la fonction $f : x \mapsto 2x^2 - x + 7$.

Exercice 51

Calculer $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \,\mathrm{d}x$.

Exercice 52

Déterminer une primitive des fonctions $f_1 : x \mapsto x^2(x^3+1)^3$ et $f_2 : x \mapsto \dfrac{x}{x^2+1}$.

Exercice 53 ($\star$)

Déterminer une primitive des fonctions $f_1 : x \mapsto x\sqrt{x}$, $f_2 : x \mapsto \sin x \cos x$ et $f_3 : x \mapsto \dfrac{x}{(x^2+3)^2}$.

Exercice 54 ($\star\star$)

Déterminer une primitive de la fonction ln.

Exercice 55

Calculer $10 + 11 + 12 + 13 + \cdots + 110$.

Exercice 56 ($\star$)

Calculer $1 + 3 + 5 + 7 + \cdots + 1001$.

Exercice 57

Calculer $3^0 + 3^2 + 3^4 + 3^6 + \cdots + 3^{100}$.

Exercice 58

Calculer $\dfrac{15!}{7!\ 9!}$.

Exercice 59 ($\star$)

Simplifier $\dfrac{(2n+1)!}{(2n-1)!} - 2\dfrac{(n+1)!}{(n-1)!}$ pour n entier strictement positif.

Exercice 60

Développer $(a-b)^6$.

Exercice 61

Développer $(x-2)^5$.

Exercice 62 ($\star$)

Factoriser $(1+x^3)^5 - (1-x^3)^5$.

Réponses

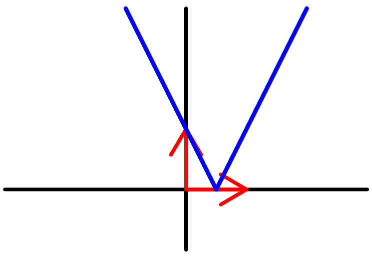
1) $S =]-\infty; -\frac{2}{3}[$.

2) $S_1 = \varnothing$ et $S_2 =]-\infty; \frac{1}{2}]$, élever au carré modifie l'ensemble des solutions.

3) $S =]-\infty; \frac{5}{3}] \cup]2; +\infty[$.

4) $|3 + (-2)| = |1| = 1$ et $|3| + |-2| = 3 + 2 = 5$.

5)



6) $S_1 =]\frac{7}{3}; +\infty[$ et $S_2 =]-\infty; -1[$ donc $S =]-\infty; -1[\cup]\frac{7}{3}; +\infty[$.

7) $3x^2 + 3x - 6 = 3(x-1)(x+2)$

x		-2		1	
signe de $3x^2 + 3x - 6$	$+$	0	$-$	0	$+$

8)

x		$-\frac{\sqrt{5}+1}{4}$		$\frac{\sqrt{5}-1}{4}$	
signe de $4x^2 + 2x - 1$	$+$	0	$-$	0	$+$

9) $\lim\limits_{\substack{x\to 1 \\ x<1}} \dfrac{x^2+1}{1-x} = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 1 \\ x>1}} \dfrac{x^2+1}{1-x} = -\infty$.

10) $\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ x<0}} \sqrt{1 - \dfrac{1}{x}} = +\infty$.

11) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sin x}{x} = 0$ car $-\dfrac{1}{x} \leqslant \dfrac{\sin x}{x} \leqslant \dfrac{1}{x}$ pour $x > 0$.

12) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x^2+1} = 0$ car $\dfrac{\ln x}{x^2+1} = \dfrac{\ln x}{x} \times \dfrac{1}{1+\frac{1}{x}}$.

13) $\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ x>0}} x^2 \ln(2x) = 0$ car $x^2 \ln(2x) = x^2 \ln 2 + x \times x \ln x$.

14) $f'(x) = -\dfrac{5}{x^6}$.

15) $f'(x) = 5e^x - 12x^2$.

16) $f'(x) = g'(x) = \dfrac{4x}{(x^2+1)^2}$.

17) $f'(x) = 10x(x^2-1)^4$ et $g'(x) = 2xe^{x^2-1}$.

18) $f'(x) = 4x^2e^{2x}$.

19) $F(x) = 2x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 7x$.

20) $F(x) = -\dfrac{1}{2x^2}$.

21) $1 + 2 + 3 + \cdots + 100 = \dfrac{100 * (100+1)}{2} = 5050$.

22) $2^1+2^2+2^3+\cdots+2^9=\dfrac{1-2^{10}}{1-2}-2^0=2^{10}-2$.

23) $\dfrac{6!}{(3!)^2}=\dfrac{1\times 2\times 3\times 4\times 5\times 6}{1\times 2\times 3\times 1\times 2\times 3}=\dfrac{4\times 5}{1}=20$.

24) $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ et $(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$.

25) $(a+b)^4=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$ et $(a-b)^4=a^4-4a^3b+6a^2b^2-4ab^3+b^4$.

26) $(a+b)^7=a^7+7a^6b+21a^5b^2+35a^4b^3+35a^3b^4+21a^2b^5+7ab^6+b^7$.

27) L'ensemble des solutions est $\left[\frac{5}{9};+\infty\right[$.

28)

x	$-\infty$		-5		$\frac{1}{2}$		$\frac{2}{3}$		$+\infty$
$1-2x$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	
$3x-2$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+5$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$\frac{(1-2x)(3x-2)}{(x+5)}$		$+$	$\vert\vert$	$-$	0	$+$	0	$-$	

29) L'ensemble des solutions est $]-\infty;-2[\cup]\frac{1}{3};+\infty[$.

30) L'ensemble des solutions est l'intervalle $[-1;4]$.

31) L'ensemble des solutions est l'intervalle $[\frac{4}{5};6]$.

32) L'ensemble des solutions est l'intervalle $[0;2]$.

33) Les solutions sont -1 et $\frac{2}{3}$.

34) Les solutions sont $\frac{-1-\sqrt{46}}{15}$ et $\frac{-1+\sqrt{46}}{15}$.

35) L'ensemble des solutions est l'intervalle $]-1;2[$.

36) La fonction f est définie sur $]-\infty;0[\cup]1;+\infty[$.

37) L'ensemble des solutions est $]-\sqrt{2};-1]\cup[0;\sqrt{2}[$.

38) Pour $m=\frac{3}{4}$, l'équation admet pour unique solution $x=1$.

39) L'ensemble des solutions est $]-\infty;-2[\cup[-1;1[\cup[3;+\infty[$.

40) L'ensemble des solutions est $]-\infty;-2[\cup]-\frac{1}{3};0[\cup]2;+\infty[$.

41) Les solutions du système sont les couples $(x_1=6;y_1=10)$ et $(x_2=10;y_2=6)$.

42) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\dfrac{\sqrt{x+1}}{\sin x}=-\infty$, $\lim\limits_{x\to 1}e^{-(\ln x)^2}=1$, $\lim\limits_{x\to-\infty}\ln(\sqrt{x^2+1}-x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0}x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)=0$.

43) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^2-1}{3x+1}=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x-\sqrt{x}}=0$.

44) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-1}=-\dfrac{1}{2}$.

45) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2+2})=0$.

46) $\lim\limits_{x\to 0}xe^{-\frac{1}{x^2}}=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x^2+1)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2\dfrac{\ln x}{x}+\dfrac{\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{x}\right)=0$.

47) $f_1'(x)=\dfrac{-x^2-4x+1}{(x^2+1)^2}$, $f_2'(x)=2e^x\sin x$ et $f_3'(x)=\dfrac{x\cos x\ln x-\sin x}{x(\ln x)^2}$.

48) $f_1'(x)=(2x^2+1)e^{x^2-1}$, $f_2'(x)=\dfrac{2(x^2+1)}{\sqrt{x^2+2}}$ et $f_3'(x)=(15x^2+1)(x^2+1)^6$.

49) $f'''(x) = 8x^2e^{2x}$.

50) $f(x) = \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 7x$.

51) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, \mathrm{d}x = 1$.

52) $F_1(x) = \frac{1}{12}(x^3+1)^4$ et $F_2(x) = \frac{1}{2}\ln(x^2+1)$.

53) $F_1(x) = \frac{2}{5}x^2\sqrt{x}$, $F_2(x) = \frac{1}{2}(\sin x)^2$ et $F_3(x) = -\frac{1}{2(x^2+1)}$.

54) $F(x) = x\ln x - x$.

55) $10 + 11 + 12 + 13 + \cdots + 110 = \frac{110\times 111}{2} - \frac{9\times 10}{2} = 6060$.

56) $1 + 3 + 5 + 7 + \cdots + 1001 = 1 + (1 + 2\times 1) + (1 + 2\times 2) + (1 + 2\times 3) + \cdots + (1 + 2\times 500) = 501 + 2(1 + 2 + 3 + \cdots + 500) = 501^2 = 251001$.

57) $3^0 + 3^2 + 3^4 + 3^6 + \cdots + 3^{100} = 9^0 + 9^1 + 9^2 + \cdots + 9^{50} = \frac{1}{8}(9^{51} - 1)$.

58) $\dfrac{15!}{7!\ 9!} = 715$.

59) $\dfrac{(2n+1)!}{(2n-1)!} - 2\dfrac{(n+1)!}{(n-1)!} = 2n^2$.

60) $(a+b)^6 = a^6 - 6a^5b + 15a^4b^2 - 20a^3b^3 + 15a^2b^4 - 6ab^5 + b^6$.

61) $(x-2)^5 = x^5 - 10x^4 + 40x^3 - 80x^2 + 80x - 32$.

62) $(1+x^3)^5 - (1-x^3)^5 = 2x^3(5 + 10x^6 + x^{12})$.