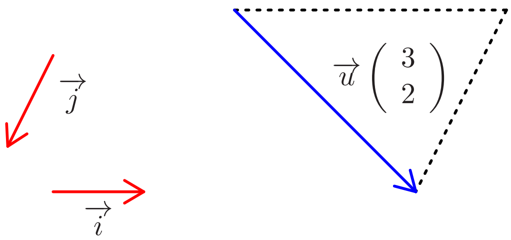
IV. Géométrie du plan

1 Repérage dans le plan

1.1 Repérage cartésien

Définition 1. *On appelle* **base** *du plan un couple* $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ *avec* $\overrightarrow{i}$ *et* $\overrightarrow{j}$ *deux vecteurs non colinéaires du plan. Tout vecteur* $\overrightarrow{u}$ *du plan s'exprime de manière unique comme combinaison linéaire des vecteurs* $\overrightarrow{i}$ *et* $\overrightarrow{j}$ *sous la forme* $\overrightarrow{u} = \lambda\overrightarrow{i} + \mu\overrightarrow{j}$ *avec* λ *et* μ *des nombres réels. Les nombres* λ *et* μ *sont appelés* **coordonnées** *du vecteur* $\overrightarrow{u}$ *dans la base* $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$*, le nombre* λ *est appelé* **abscisse** *du vecteur* $\overrightarrow{u}$ *dans la base* $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ *et le nombre* μ *est appelé* **ordonnée** *du vecteur* $\overrightarrow{u}$ *dans la base* $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$*. On note* $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}\lambda\\ \mu\end{pmatrix}$.

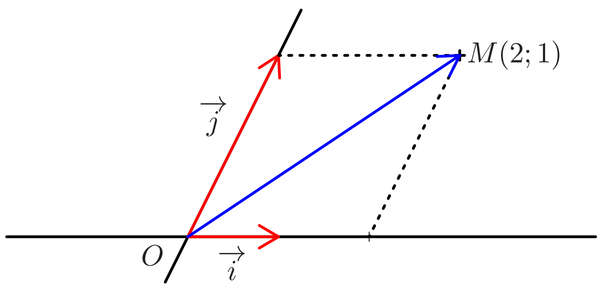


Remarque 1. *Dans la base* $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$*, on a* $\overrightarrow{i}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ *et* $\overrightarrow{j}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$.

Définition 2. *Une base du plan est dite* **orthogonale** *si ses deux vecteurs sont orthogonaux et* **orthonormale** *si ses deux vecteurs sont orthogonaux et de même norme.*

Exercice 1. *Le plan étant muni d'une base orthonormale* $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$*, on considère les vecteurs* $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}5\\-1\end{pmatrix}$ *et* $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}-3\\1\end{pmatrix}$ *ainsi que* $\overrightarrow{w} = 2\overrightarrow{u} + 3\overrightarrow{v}$*. Faire une figure puis déterminer les coordonnées du vecteur* $\overrightarrow{w}$.

Définition 3. *On appelle* **repère cartésien** *du plan un triplet* $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$*, avec* O *un point du plan et* $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ *une base du plan. Le point* O *est appelé* **origine** *du repère, la droite* $(O, \overrightarrow{i})$ *est appelée* **axe des abscisses** *et la droite* $(O, \overrightarrow{j})$ *est appelée* **axe des ordonnées**. *Tout point* M *du plan est repéré de manière unique par deux nombres* x *et* y *tels que* $\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j}$*. Les nombres* x *et* y *sont appelés* **coordonnées** *du point* M *dans le repère* $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$*, le nombre* x *est appelé* **abscisse** *du point* M *dans le repère* $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ *et le nombre* y *est appelé* **ordonnée** *du point* M *dans le repère* $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$*. On note* $M(x; y)$.



Exercice 2. *Le plan étant muni d'un repère orthonormal* $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$*, on considère les points* $A(-1; 0)$*,* $B(2; 1)$ *et* $C(1; -2)$*. Faire une figure puis déterminer la nature du triangle* ABC.

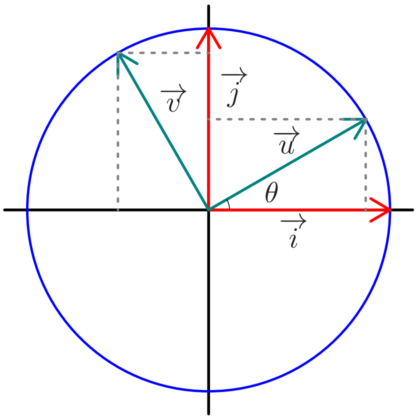
1.2 Repérage polaire

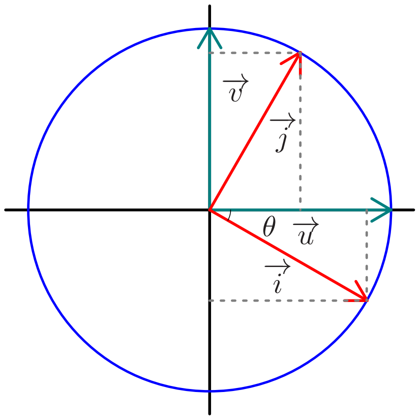
Propriété 1. *Dans le plan complexe, l'image d'un vecteur $\overrightarrow{w}$ d'affixe $z_{\overrightarrow{w}}$ par la rotation d'angle θ est le vecteur $\overrightarrow{w'} = r_\theta(\overrightarrow{w})$ d'affixe $z_{\overrightarrow{w'}} = e^{i\theta} z_{\overrightarrow{w}}$.*

Exercice 3. *Dans le plan muni d'une base orthonormale directe $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, on considère le vecteur $\overrightarrow{w}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ ainsi que son image $\overrightarrow{w'}$ par la rotation d'angle $-\dfrac{\pi}{6}$. Faire une figure puis déterminer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{w'}$.*

Corollaire 1. *Le plan étant muni d'une base orthonormale directe $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, on considère la base orthonormale $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ obtenue par rotation d'angle θ des vecteurs $\overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{j}$. On a :*

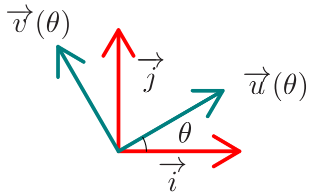
$$\begin{cases} \overrightarrow{u} = \cos\theta\ \overrightarrow{i} + \sin\theta\ \overrightarrow{j} \\ \overrightarrow{v} = -\sin\theta\ \overrightarrow{i} + \cos\theta\ \overrightarrow{j} \end{cases} \qquad \begin{cases} \overrightarrow{i} = \cos\theta\ \overrightarrow{u} - \sin\theta\ \overrightarrow{v} \\ \overrightarrow{j} = \sin\theta\ \overrightarrow{u} + \cos\theta\ \overrightarrow{v} \end{cases}$$





Définition 4. *Le plan étant muni d'une base orthonormale directe $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, on définit pour $\theta \in \mathbb{R}$ la* **base polaire** $\left(\overrightarrow{u}(\theta), \overrightarrow{v}(\theta)\right)$ *par :*

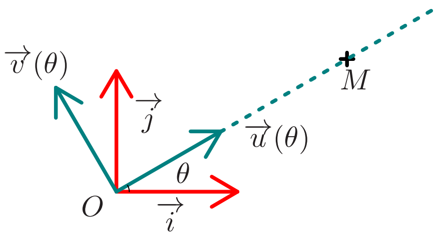
$$\boxed{\begin{array}{lllll} \overrightarrow{u}(\theta) & = r_\theta(\overrightarrow{i}) & = \cos\theta\ \overrightarrow{i} & + & \sin\theta\ \overrightarrow{j} \\ \overrightarrow{v}(\theta) & = r_\theta(\overrightarrow{j}) & = -\sin\theta\ \overrightarrow{i} & + & \cos\theta\ \overrightarrow{j} \end{array}}$$



Remarque 2. *Dans le plan complexe, les affixes des vecteurs $\overrightarrow{u}(\theta)$ et $\overrightarrow{v}(\theta)$ sont respectivement $e^{i\theta}$ et $e^{i(\theta+\frac{\pi}{2})} = ie^{i\theta}$.*

Propriété 2. *Dans le plan muni d'un repère orthonormal direct $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ on considère un point $M(x;y)$, alors il existe deux réels ρ et θ tels que $\overrightarrow{OM} = \rho\overrightarrow{u}(\theta)$. Les nombres ρ et θ sont appelés* **coordonnées polaires** *du point M dans le repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, on a :*

$$\boxed{\begin{array}{lll} x & = & \rho\cos\theta \\ y & = & \rho\sin\theta \\ \rho & = & \sqrt{x^2+y^2} \end{array}}$$



Remarque 3. *Il n'y a pas unicité des coordonnées polaires.*

Remarque 4. *La base polaire $\left(\overrightarrow{u}(\theta), \overrightarrow{v}(\theta)\right)$ est une base mobile car elle dépend du point M considéré.*

Exercice 4. *Le plan étant muni d'un repère orthonormal direct $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, on considère le point $M(-1;1)$. Faire une figure puis déterminer les coordonnées polaires du point M.*

2 Produit scalaire et déterminant dans le plan

2.1 Produit scalaire

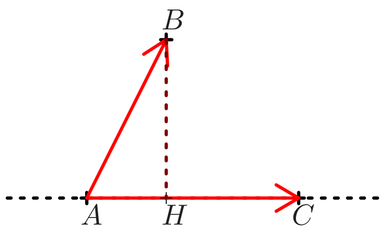
Définition 5. *On appelle* **produit scalaire** *de deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ du plan :*

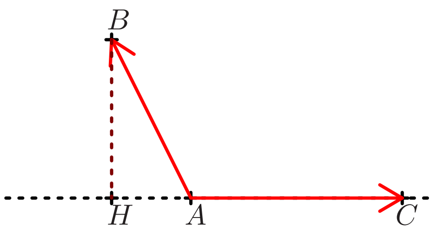
$$\boxed{\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \begin{cases} ||\overrightarrow{u}|| \times ||\overrightarrow{v}|| \times \cos(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) & \text{si } \overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0} \text{ et } \overrightarrow{v} \neq \overrightarrow{0} \\ 0 & \text{si } \overrightarrow{u} = \overrightarrow{0} \text{ ou } \overrightarrow{v} = \overrightarrow{0} \end{cases}}$$

Remarque 5. *Le produit scalaire est symétrique car* $\boxed{\overrightarrow{v}.\overrightarrow{u} = \overrightarrow{u}\,\overrightarrow{v}}$.

Remarque 6. *Le produit scalaire est nul si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux.*

Propriété 3. *On considère trois points A, B et C non alignés du plan et on note H le projeté orthogonal du point B sur la droite (AC), alors $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AH}.\overrightarrow{AC} = \pm AH \times AC$.*





Propriété 4. *On considère deux vecteurs $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ du plan complexe, alors :*

$$\boxed{\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = xx' + yy'}$$

Remarque 7. *Cette propriété n'est valide que si le plan est muni d'une base orthonormale.*

Exercice 5. *Dans le plan muni d'un repère orthonormal direct, on considère les points $A(1;-1)$, $B(2;1)$ et $C(-1;3)$. Faire une figure puis exprimer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ de deux manières différentes et en déduire la mesure de l'angle $\widehat{BAC}$.*

Propriété 5. Bilinéarité du produit scalaire

On considère trois vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ du plan et deux nombres réels λ et μ, alors :

$$\boxed{(\lambda\overrightarrow{u} + \mu\overrightarrow{v}).\overrightarrow{w} = \lambda(\overrightarrow{u}.\overrightarrow{w}) + \mu(\overrightarrow{v}.\overrightarrow{w})}$$

Propriété 6. Formule d'Al-Kashi

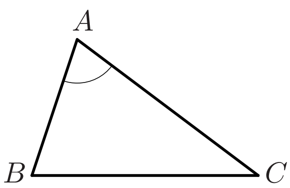
On considère deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ du plan, alors :

$$\boxed{\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \frac{1}{2}\left(||\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}||^2 - ||\overrightarrow{u}||^2 - ||\overrightarrow{v}||^2\right)}$$

Théorème 1. Théorème d'Al-Kashi *ou* **Loi des cosinus**

On considère un triangle ABC du plan, alors :

$$\boxed{BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \times AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC})}$$



Remarque 8. *Ce théorème est une généralisation du théorème de Pythagore.*

Exercice 6. *On considère un triangle ABC tel que $AB = 2$, $AC = 3$ et $BC = 4$. Faire une figure puis déterminer les mesures des angles de ce triangle.*

2.2 Déterminant

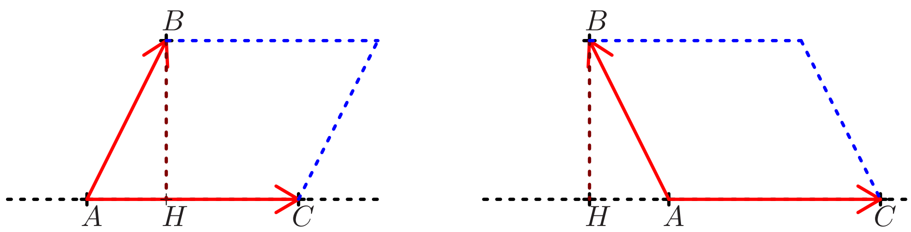
Définition 6. *On appelle* **déterminant** *de deux vecteurs* $\overrightarrow{u}$ *et* $\overrightarrow{v}$ *du plan :*

$$\boxed{[\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}]=\begin{cases}||\overrightarrow{u}||\times||\overrightarrow{v}||\times\sin(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}) & \text{si } \overrightarrow{u}\neq\overrightarrow{0} \text{ et } \overrightarrow{v}\neq\overrightarrow{0}\\ 0 & \text{si } \overrightarrow{u}=\overrightarrow{0} \text{ ou } \overrightarrow{v}=\overrightarrow{0}\end{cases}}$$

Remarque 9. *Le déterminant est antisymétrique car* $\boxed{[\overrightarrow{v},\overrightarrow{u}]=-[\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}]}$.

Remarque 10. *Le déterminant est nul si et seulement si les vecteurs* $\overrightarrow{u}$ *et* $\overrightarrow{v}$ *sont colinéaires.*

Propriété 7. *On considère trois points* A, B *et* C *non alignés du plan et on note* H *le projeté orthogonal du point* B *sur la droite* (AC), *alors* $[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}]=[\overrightarrow{HB},\overrightarrow{AC}]=\pm HB\times AC$.



Propriété 8. *On considère deux vecteurs* $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ *et* $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ *du plan complexe, alors :*

$$\boxed{[\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}]=xy'-yx'}$$

Remarque 11. *Cette propriété n'est valide que si le plan est muni d'une base orthonormale.*

Exercice 7. *Dans le plan muni d'un repère orthonormal, on considère les points* $A(1;-1)$, $B(2;1)$ *et* $C(-1;3)$. *Faire une figure puis calculer* $[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}]$, *en déduire l'aire du triangle* ABC.

Exercice 8. *Dans le plan muni d'un repère orthonormal, on considère les vecteurs* $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}-3\\1\end{pmatrix}$ *et* $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$. *Faire une figure puis calculer* $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}$ *et* $[\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}]$, *en déduire la mesure de l'angle* $(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})$.

Propriété 9. **Bilinéarité du déterminant**

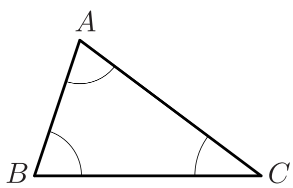
On considère trois vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ *et* $\overrightarrow{w}$ *du plan et deux nombres réels* λ *et* μ, *alors :*

$$\boxed{[\lambda\overrightarrow{u}+\mu\overrightarrow{v},\overrightarrow{w}]=\lambda\,[\overrightarrow{u},\overrightarrow{w}]+\mu\,[\overrightarrow{v},\overrightarrow{w}]}$$

Théorème 2. **Loi des sinus**

On considère un triangle ABC *du plan, alors :*

$$\boxed{\frac{\sin\widehat{BAC}}{BC}=\frac{\sin\widehat{ABC}}{AC}=\frac{\sin\widehat{ACB}}{AB}}$$



Exercice 9. *On considère un triangle* ABC *tel que* $AB=2\sqrt{3}$, $BC=6$ *et* $\widehat{ACB}=\dfrac{\pi}{6}$. *Faire une figure puis déterminer les mesures possibles de l'angle* $\widehat{BAC}$.

3 Droites et cercles du plan

3.1 Droites

Propriété 10. Équation cartésienne d'une droite

Dans le plan muni d'un repère orthonormal, les coordonnées $(x;y)$ des points d'une droite $\mathcal{D}$ vérifient une équation de la forme $ax+by+c=0$ avec a, b et c des nombres réels et $(a;b)\neq(0;0)$, cette équation est appelée une **équation cartésienne** *de la droite $\mathcal{D}$.*

Réciproquement, l'ensemble des points de coordonnées $(x;y)$ vérifiant une équation de la forme $ax+by+c=0$ avec a, b et c des nombres réels et $(a;b)\neq(0;0)$ est une droite.

Exercice 10. *Dans le plan muni d'un repère orthonormal, on considère les points $A(1;2)$ et $B(-3;5)$ ainsi qu'un point $M(x;y)\in(AB)$. Faire une figure puis calculer $[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AM}]$, en déduire un équation cartésienne de la droite (AB).*

Propriété 11. *Dans le plan muni d'un repère orthonormal, on considère la droite $\mathcal{D}$ d'équation cartésienne $ax+by+c=0$ avec a, b et c des nombres réels et $(a;b)\neq(0;0)$. Alors le vecteur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$ est un* **vecteur directeur** *de la droite $\mathcal{D}$ et le vecteur $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ est un* **vecteur normal** *à la droite $\mathcal{D}$.*

Exercice 11. *Dans le plan muni d'un repère orthonormal, on considère la droite $\mathcal{D}_1$ d'équation $3x-2y+5=0$, le point $A(5;-2)$ et la droite $\mathcal{D}_2$ passant par A et parallèle à la droite $\mathcal{D}_1$. Faire une figure puis déterminer une équation cartésienne de la droite $\mathcal{D}_2$.*

Propriété 12. Paramétrage d'une droite

Dans le plan muni d'un repère orthonormal on considère une droite $\mathcal{D}$ passant par le point $A(x_A;y_A)$ et admettant $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}x_{\overrightarrow{u}}\\y_{\overrightarrow{u}}\end{pmatrix}$ pour vecteur directeur. Alors le point $M(x;y)$ appartient à la droite $\mathcal{D}$ si et seulement si il existe $t\in\mathbb{R}$ tel que :

$$\left\{\begin{array}{ccccc} x & = & x_A & + & t\ x_{\overrightarrow{u}} \\ y & = & y_A & + & t\ y_{\overrightarrow{u}} \end{array}\right.$$

Cette écriture est appelée un **paramétrage** *de la droite $\mathcal{D}$.*

Exercice 12. *Dans le plan muni d'un repère orthonormal, déterminer un paramétrage de la droite passant par les points $A(1;2)$ et $B(-3;5)$.*

Propriété 13. Intersection de deux droites

Dans le plan muni d'un repère orthonormal, on considère une droite $\mathcal{D}$ d'équation cartésienne $ax+by+c=0$ ainsi qu'une droite $\mathcal{D}'$ d'équation cartésienne $a'x+b'y+c'=0$. Alors :

- *Si $ab'-ba'=0$, les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont parallèles ou confondues.*
- *Si $ab'-ba'\neq0$, les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ admettent un unique point d'intersection.*

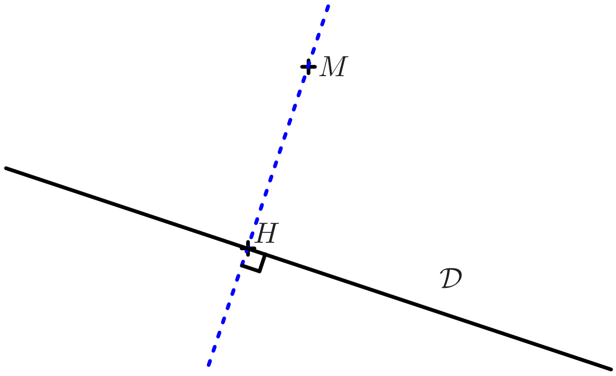
Exercice 13. *Dans le plan muni d'un repère orthonormal, on considère les points $A(1;2)$, $B(-1,-3)$, $C(1,-2)$ et $D(4;3)$ ainsi que les droites (AB) et (CD).*

- *Faire une figure.*
- *Déterminer une équation cartésienne des droites (AB) et (CD).*
- *Montrer que les droites (AB) et (CD) admettent un unique point d'intersection I.*
- *On note $(x;y)$ les coordonnées du point I. Exprimer y en fonction de x en utilisant l'équation cartésienne de la droite (AB) puis remplacer y dans l'équation cartésienne de la droite (CD) afin de déterminer les coordonnées du point I.*

Propriété 14. **Distance d'un point à une droite**

Dans le plan muni d'un repère orthonormal, on considère une droite $\mathcal{D}$ d'équation cartésienne $ax + by + c = 0$ avec a, b et c des nombres réels et $(a; b) \neq (0; 0)$. Alors la distance d'un point $M(x_M; y_M)$ à la droite $\mathcal{D}$ est :

$$\boxed{\mathrm{d}(M, \mathcal{D}) = \frac{|ax_M + by_M + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}}$$



Remarque 12. *La distance de l'origine du repère à la droite $\mathcal{D}$ est $\frac{|c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$.*

Exercice 14. *Dans le plan muni d'un repère orthonormal, on considère le point $M(5; -2)$ ainsi que la droite $\mathcal{D}$ d'équation $3x - 2y + 5 = 0$. Faire une figure puis calculer la distance du point M à la droite $\mathcal{D}$.*

3.2 Cercles

Propriété 15. **Équation cartésienne d'un cercle**

Dans le plan muni d'un repère orthonormal, les coordonnées $(x; y)$ des points d'un cercle $\mathcal{C}$ de centre $\Omega(x_\Omega; y_\Omega)$ et de rayon R vérifient une équation de la forme $(x - x_\Omega)^2 + (y - y_\Omega)^2 = R^2$, cette équation est appelée une **équation cartésienne** *du cercle $\mathcal{C}$.*

Réciproquement, l'ensemble des points de coordonnées $(x; y)$ vérifiant une équation de la forme $(x - x_\Omega)^2 + (y - y_\Omega)^2 = R^2$ avec x_Ω, y_Ω et R des nombres réels et $R \geqslant 0$ est un cercle $\mathcal{C}$ de centre $\Omega(x_\Omega; y_\Omega)$ et de rayon R.

Exercice 15. *Dans le plan muni d'un repère orthonormal, montrer que l'équation cartésienne $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 4 = 0$ est l'équation d'un cercle dont on déterminera le centre ainsi que le rayon.*

Propriété 16. **Paramétrage d'un cercle**

Dans le plan muni d'un repère orthonormal on considère un cercle $\mathcal{C}$ de centre $\Omega(x_\Omega; y_\Omega)$ et de rayon R. Alors le point $M(x; y)$ appartient au cercle $\mathcal{C}$ si et seulement si il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\left\{\begin{array}{rcrcl} x & = & x_\Omega & + & R\cos t \\ y & = & y_\Omega & + & R\sin t \end{array}\right.$$

Cette écriture est appelée un **paramétrage** *du cercle $\mathcal{C}$.*

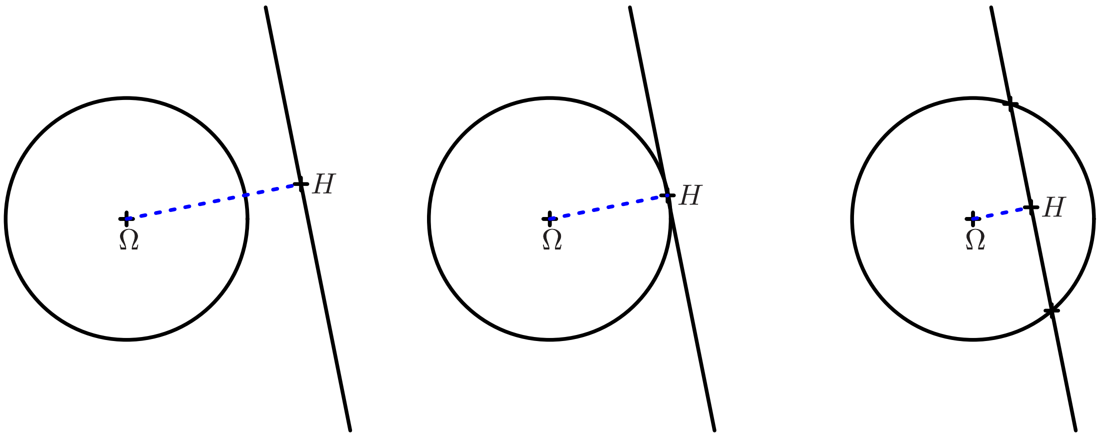
Exercice 16. *Dans le plan muni d'un repère orthonormal, on considère le cercle $\mathcal{C}$ de centre $\Omega(-1; 3)$ et de rayon 2.*

- *Faire une figure.*
- *Déterminer un paramétrage du cercle $\mathcal{C}$.*
- *Placer sur la figure les points $M_{t=0}$, $M_{t=\frac{\pi}{2}}$, $M_{t=\pi}$ et $M_{t=\frac{3\pi}{2}}$.*

Propriété 17. Intersection d'une droite et d'un cercle

Dans le plan muni d'un repère orthonormal, on considère une droite $\mathcal{D}$ ainsi qu'un cercle $\mathcal{C}$ de centre Ω et de rayon $R > 0$. Alors :

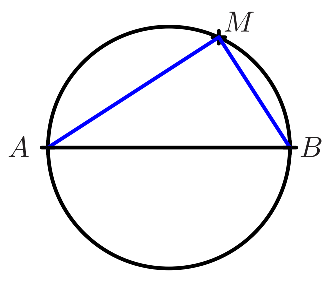
- *Si $\mathrm{d}(\Omega, \mathcal{D}) > R$, la droite $\mathcal{D}$ et le cercle $\mathcal{C}$ n'ont aucun point d'intersection.*
- *Si $\mathrm{d}(\Omega, \mathcal{D}) = R$, la droite $\mathcal{D}$ et le cercle $\mathcal{C}$ ont un unique point d'intersection et la droite $\mathcal{D}$ est dite tangente en ce point au cercle $\mathcal{C}$.*
- *Si $\mathrm{d}(\Omega, \mathcal{D}) < R$, la droite $\mathcal{D}$ et le cercle $\mathcal{C}$ ont deux points distincts d'intersection.*



Exercice 17. *Dans le plan muni d'un repère orthonormal, on considère la droite $\mathcal{D}$ et le cercle $\mathcal{C}$ d'équations cartésiennes respectives $x - y + 4 = 0$ et $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 20 = 0$.*

- *Faire une figure.*
- *Montrer que $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ admettent deux points d'intersection.*
- *On note $(x; y)$ les coordonnées d'un point d'intersection de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$. Exprimer y en fonction de x en utilisant l'équation cartésienne de la droite $\mathcal{D}$ puis remplacer y dans l'équation cartésienne du cercle $\mathcal{C}$ afin de déterminer les coordonnées des points d'intersection de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$.*

Propriété 18. *Dans le plan muni d'un repère orthonormal, on considère deux points distincts A et B. Alors le point M appartient au cercle de diamètre $[AB]$ si et seulement si $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$.*



Exercice 18. *Dans le plan muni d'un repère orthonormal, on considère les points $A(-2; 1)$ et $B(2; 4)$. Déterminer une équation cartésienne du cercle de diamètre $[AB]$.*

4 Transformations du plan

4.1 Translation

Définition 7. *Le point M' est l'image du point M par la* **translation** *de vecteur $\overrightarrow{u}$ si $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{u}$.*

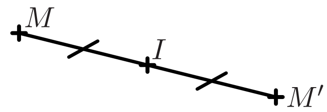
$t_{\overrightarrow{u}} : M \mapsto M'$

Exercice 19. *Dans le plan muni d'un repère orthonormal, déterminer l'image A' du point $A(-1;3)$ par la translation de vecteur $\overrightarrow{u}\binom{-4}{2}$.*

Propriété 19. *Une translation de vecteur non nul n'admet aucun point invariant.*

4.2 Symétrie centrale

Définition 8. *Le point M' est l'image du point M par la* **symétrie centrale** *de centre I si I est le milieu du segment $[MM']$.*



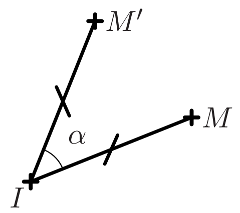
$s_I : M \mapsto M'$

Exercice 20. *Dans le plan muni d'un repère orthonormal, on considère les points $A(5;2)$ et $B(3;-1)$. Déterminer l'image A' du point A par la symétrie centrale de centre B.*

Propriété 20. *Une symétrie centrale admet son centre pour seul point invariant.*

4.3 Rotation

Définition 9. *Le point M' est l'image du point M par la* **rotation** *de centre I et d'angle α si $IM = IM'$ et $(\overrightarrow{IM}, \overrightarrow{IM'}) = \alpha$ (pour $M \neq I$).*



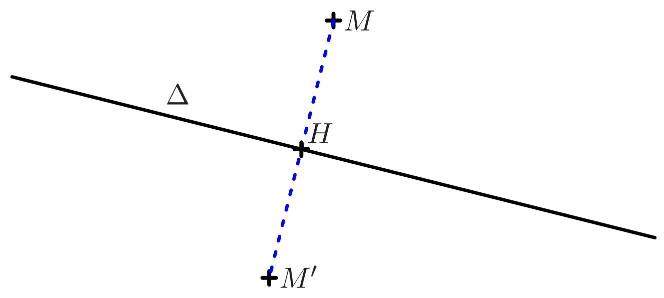
$r_{I,\alpha} : M \mapsto M'$

Exercice 21. *Dans le plan muni d'un repère orthonormal direct, déterminer l'image A' du point $A(2;3)$ par la rotation de centre $I(-1;2)$ et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$. (on pourra utiliser les nombres complexes)*

Propriété 21. *Une rotation d'angle non nul admet son centre pour seul point invariant.*

4.4 Réflexion

Définition 10. *Le point M' est l'image du point M par la* **réflexion** *d'axe Δ si le projeté orthogonal de M sur Δ est le milieu du segment $[MM']$.*



$s_{\Delta} : M \mapsto M'$

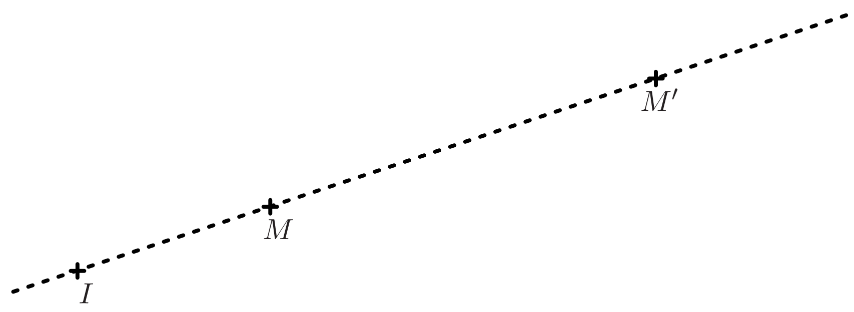
Exercice 22. *Dans le plan muni d'un repère orthonormal, déterminer l'image A' du point $A(1;2)$ par la réflexion d'axe Δ d'équation cartésienne $x+y=0$.*

Propriété 22. *L'ensemble des points invariants par une réflexion est son axe.*

4.5 Homothétie

Définition 11. *Soit I un point du plan et k un nombre réel non nul, on appelle* **homothétie** *de centre I et de rapport k la transformation qui à tout point M du plan associe le point M' défini par :*

$$\overrightarrow{IM'} = k\overrightarrow{IM}$$



$h_{I,k} : M \mapsto M'$

Remarque 13. *Si $k=1$ l'homothétie est la transformation identité, si $k=-1$ l'homothétie est une symétrie centrale de centre I.*

Exercice 23. *On considère un segment $[AB]$ de longueur 4 cm, contruire le point B_1 image du point B par l'homothétie de centre A et de rapport $\frac{3}{2}$ ainsi que le point B_2 image du point B par l'homothétie de centre A et de rapport $-\frac{1}{2}$.*

Propriété 23. *Une homothétie de rapport différent de 1 admet son centre pour seul point invariant.*

Exercice 24. *Dans le plan muni d'un repère orthonormal, on considère les points $A(0;2)$, $B(1;-1)$, $C(-1;0)$ et $I(-2;1)$ ainsi que les points A', B' et C' images respectives des points A, B et C par l'homothétie de centre I et de rapport -2. Faire une figure puis déterminer les coordonnées des points A', B' et C'.*

Exercices supplémentaires

Exercice 25

Le plan étant muni d'un repère orthonormal $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, on considère les points $A(-1;4)$, $B(3;-2)$ et $C(-5;1)$ ainsi qu'un point quelconque $M(x;y)$. Faire une figure. Exprimer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$ en fonction de x et y et en déduire les coordonnées du centre de gravité G du triangle ABC défini par $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0}$.

Exercice 26 ($\star$)

Le plan étant muni d'une base orthonormale $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, on considère deux vecteurs $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$. Faire une figure. Montrer que $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ est une base du plan et déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{j}$ dans cette base.

Exercice 27 ($\star$)

Le plan étant muni d'un repère orthonormal $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, on considère deux vecteurs $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ ainsi que deux points $O'(1;2)$ et $M(3;4)$. Faire une figure. Montrer que $(O', \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ est un repère du plan et déterminer les coordonnées du point M dans celui-ci.

Exercice 28 ($\star\star$)

Dans le plan, on considère un triangle ABC ainsi que le point G défini par $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0}$. Montrer que le point G est l'intersection des médianes du triangle ABC.

Exercice 29

Dans le plan complexe, on considère un vecteur $\overrightarrow{u}$ d'affixe $3 - 2i$.

Déterminer l'affixe de l'image $\overrightarrow{u'}$ de ce vecteur par la rotation d'angle $-\dfrac{2\pi}{3}$.

Exercice 30

Dans le plan muni d'un repère orthonormal direct, on considère un vecteur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$.

Déterminer en fonction de x et y les coordonnées $\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ de l'image $\overrightarrow{u'}$ de ce vecteur par la rotation d'angle $\dfrac{\pi}{2}$.

Exercice 31 ($\star$)

Le plan étant muni d'une base orthonormale directe $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, on considère la base $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ obtenue par rotation d'angle $-\dfrac{\pi}{6}$ de cette dernière.

Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{j}$ dans la base $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.

Exercice 32

Dans le plan muni d'un repère orthonormal direct, déterminer les coordonnées polaires du point M de coordonnées $(-5\sqrt{3};-5)$.

Exercice 33 ($\star\star$)

Dans le plan muni d'un repère orthonormal direct, déterminer les coordonnées polaires du point M de coordonnées $(\sqrt{3}-2; 3-2\sqrt{3})$.

Exercice 34

On considère un carré $ABCD$ ainsi que les points I, J et K définis par $\overrightarrow{BI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$. Faire une figure. Exprimer les coordonnées des points A, B, C, D, I, J et K dans le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$ puis calculer $\overrightarrow{IJ}.\overrightarrow{IK}$. Que peut-on en déduire ?

Exercice 35

Le plan étant muni d'un repère orthonormal $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, on considère les points $A(1; 2)$ et $B(-3; 4)$. Faire une figure. Déterminer la mesure de l'angle $\widehat{AOB}$.

Exercice 36 ($\star$)

On considère deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ du plan.
Exprimer $||2\overrightarrow{u} + 3\overrightarrow{v}||^2 - ||3\overrightarrow{u} + 2\overrightarrow{v}||^2$ en fonction de $||\overrightarrow{u}||$ et $||\overrightarrow{v}||$.

Exercice 37 ($\star\star$)

Dans le plan, on considère un segment $[AB]$, déterminer l'ensemble des points M vérifiant $MA^2 + MB^2 = AB^2$.

Exercice 38

On considère un triangle ABC rectangle isocèle en A ainsi que les points I, J et K définis par $\overrightarrow{CI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BK} = \frac{1}{5}\overrightarrow{BA}$. Faire une figure. Exprimer les coordonnées des points A, B, C, I, J et K dans le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ puis calculer $[\overrightarrow{IJ}, \overrightarrow{IK}]$. Que peut-on en déduire ?

Exercice 39

Dans le plan complexe, on considère les points A, B et C d'affixes respectives $i-2$, $1-i$ et $5+2i$. Faire une figure. Calculer l'aire du triangle ABC.

Exercice 40 ($\star$)

Démontrer que $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = [\overrightarrow{u}, r_{\frac{\pi}{2}}(\overrightarrow{v})]$ et $[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}] = r_{\frac{\pi}{2}}(\overrightarrow{u}).\overrightarrow{v}$.

Exercice 41

Dans le plan muni d'une base orthonormale directe, on considère les vecteurs $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}1+2\sqrt{3}\\2-\sqrt{3}\end{pmatrix}$. Faire une figure. Déterminer la mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.

Exercice 42 ($\star$)

On considère un triangle ABC tel que $BC = 4$, $\widehat{ABC} = \dfrac{\pi}{4}$ et $\widehat{ACB} = \dfrac{\pi}{3}$. Faire une figure. Calculer les longueurs AB et AC.

Exercice 43 ($\star\star\star$)

On considère un triangle, on appelle a, b et c les longueurs de ses côtés et γ la mesure de l'angle opposé au côté de longueur c. Exprimer $\cos\gamma$ en fonction de a, b et c. En déduire $(\sin\gamma)^2$ sous forme factorisée. Exprimer l'aire du triangle en fonction de a, b et c.

Exercice 44 ($\star\star\star$)

On considère un triangle, on appelle a, b et c les longueurs de ses côtés et α, β et γ les mesures des angles respectivement opposés aux côtés de longueurs a, b et c.

Démontrer que $\dfrac{\frac{a-b}{2}}{\frac{a+b}{2}} = \dfrac{\tan\frac{\alpha-\beta}{2}}{\tan\frac{\alpha+\beta}{2}}$.

Exercice 45

Dans le plan muni d'un repère orthonormal, on considère le point $A(2;-1)$, la droite $\mathcal{D}_1$ d'équation cartésienne $3x-2y+5=0$ ainsi que la droite $\mathcal{D}_2$ perpendiculaire à $\mathcal{D}_1$ passant par A. Faire une figure. Déterminer une équation cartésienne de la droite $\mathcal{D}_2$.

Exercice 46

Dans le plan muni d'un repère orthonormal, on considère la droite $\mathcal{D}$ passant par le point $A(-1;3)$ et admettant $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ pour vecteur normal. Faire une figure. Déterminer un paramétrage de la droite $\mathcal{D}$.

Exercice 47

Dans le plan muni d'un repère orthonormal, on considère les points $A(3;4)$, $B(1;2)$ et $C(5;1)$. Dans le triangle ABC, on note $\mathcal{D}_1$ la hauteur issue de A, $\mathcal{D}_2$ la hauteur issue de B et $\mathcal{D}_3$ la hauteur issue de C. Faire une figure. Déterminer une équation cartésienne des droites $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$ et $\mathcal{D}_3$. En déduire les coordonnées de l'orthocentre du triangle ABC.

Exercice 48

Dans le plan muni d'un repère orthonormal, on considère les points $A(3;4)$, $B(1;2)$ et $C(5;1)$. Dans le triangle ABC, on note $\mathcal{D}_1$ la médiatrice de $[BC]$, $\mathcal{D}_2$ la médiatrice de $[AC]$ et $\mathcal{D}_3$ la médiatrice de $[AC]$. Faire une figure. Déterminer une équation cartésienne des droites $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$ et $\mathcal{D}_3$. En déduire les coordonnées du centre du cercle circonscrit au triangle ABC.

Exercice 49

Dans le plan muni d'un repère orthonormal, on considère le point $A(2;1)$ ainsi que la droite $\mathcal{D}$ d'équation paramétrique $\left\{\begin{array}{rcrcr} x & = & 3 & + & 3t \\ y & = & -1 & + & 2t \end{array}\right.$. Faire une figure. Déterminer la distance du point A à la droite $\mathcal{D}$.

Exercice 50

Dans le plan muni d'un repère orthonormal, on considère le point $M(5;-2)$, la droite $\mathcal{D}$ d'équation cartésienne $3x-2y+5=0$ ainsi que le point H projeté orthogonal de M sur $\mathcal{D}$. Faire une figure. Calculer les coordonnées du point H.

Exercice 51

Dans le plan muni d'un repère orthonormal, on considère les points $A(3;1)$ et $B(-2;2)$ ainsi que le cercle $\mathcal{C}$ de centre A passant par B. Faire une figure. Déterminer une équation cartésienne du cercle $\mathcal{C}$.

Exercice 52

Dans le plan muni d'un repère orthonormal, on considère les points $A(3;2)$, $B(-1;-2)$ et $\Omega(2;-1)$ ainsi que la droite (AB) et le cercle $\mathcal{C}$ de centre Ω et de rayon 2. Faire une figure. Déterminer l'intersection de la droite (AB) et du cercle $\mathcal{C}$.

Exercice 53 ($\star\star$)

Dans le plan muni d'un repère orthonormal, on considère les points $A(3;1)$, $B(6;5)$ et $C(2;-2)$ ainsi que le cercle de diamètre $[AB]$ et ses tangentes $\mathcal{T}_1$ et $\mathcal{T}_2$ passant par le point C. Faire une figure. Déterminer une équation cartésienne de $\mathcal{T}_1$ et $\mathcal{T}_2$.

Exercice 54

Dans le plan muni d'un repère orthonormal, on considère la transformation $t : M(x;y) \mapsto M'(x-2;y+4)$. Faire une figure en considérant quelques points et leur images par t. Montrer que t est une translation de vecteur $\overrightarrow{u}$ dont on déterminera les coordonnées.

Exercice 55

Dans le plan muni d'un repère orthonormal, on considère la transformation $s : M(x;y) \mapsto M'(-x-2;4-y)$. Faire une figure en considérant quelques points et leur images par s. Montrer que s est une symétrie centrale et déterminer son centre.

Exercice 56

Dans le plan muni d'un repère orthonormal, on considère les points $I(-1;2)$ et $M(x;y)$. Déterminer en fonction de x et de y les coordonnées $(x';y')$ de l'image M' du point M par la rotation de centre I et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

Exercice 57 ($\star\star$)

Dans le plan muni d'un repère orthonormal, on considère les points $A(-1;-3)$, $B(2;1)$ et $M(x;y)$. Faire une figure. Déterminer en fonction de x et de y les coordonnées du projeté orthogonal H du point M sur la droite (AB), en déduire les coordonnées $(x';y')$ du point M' image du point M par la réflexion d'axe (AB).

Exercice 58

Dans le plan muni d'un repère orthonormal, on considère les points $I(-1;3)$ et $M(x;y)$. Déterminer en fonction de x et de y les coordonnées $(x';y')$ de l'image M' du point M par l'homothétie de centre I et de rapport -2.

Exercice 59 ($\star$)

On considère un segment $[AB]$ du plan. Montrer qu'il existe une unique homothétie h de rapport -2 qui transforme A en B et déterminer son centre.

Exercice 60 ($\star\star$)

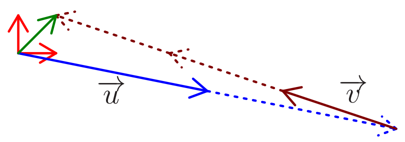
Dans le plan complexe, on considère les points M, N, M' et N' d'affixes respectives $6+i$, $-3-2i$, $-2-i$ et $4+i$. Faire une figure. Montrer qu'il existe une unique homothétie h transformant M en M' et N en N' et déterminer ses éléments caractéristiques.

Exercice 61 ($\star\star\star$)

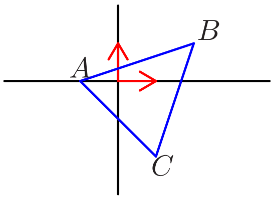
On considère l'application définie sur le plan complexe privé de O par l'écriture complexe $z' = \dfrac{1}{z}$. Déterminer l'image d'un cercle de rayon R de centre d'affixe ω ne passant pas par O par cette application.

Réponses

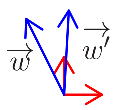
1) $\overrightarrow{w}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.



2) Le triangle ABC est isocèle en B car $AB = BC = \sqrt{10}$.

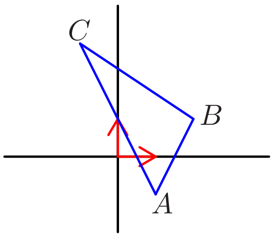


3) $\overrightarrow{w'}\begin{pmatrix} 1-\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2}+\sqrt{3} \end{pmatrix}$.

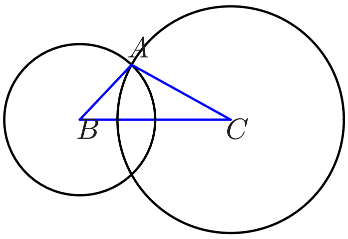


4) $\rho = \sqrt{2}$ et $\theta = \frac{3\pi}{4}$.

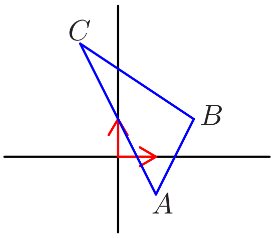
5) $\widehat{BAC} = \arccos\left(\frac{3}{5}\right)$.



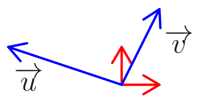
6) $\widehat{BAC} = \arccos\left(-\frac{1}{4}\right)$, $\widehat{ABC} = \arccos\left(\frac{11}{16}\right)$ et $\widehat{ACB} = \arccos\left(\frac{7}{8}\right)$.



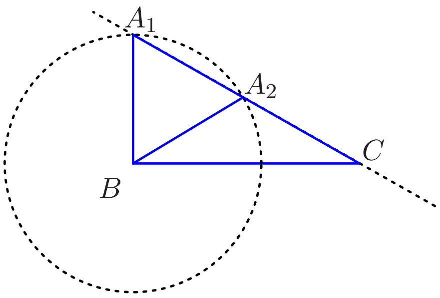
7) $\mathcal{A}(ABC) = 4$.



8) $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = -\text{arccos}\left(-\frac{1}{10}\sqrt{2}\right)$.



9) $\widehat{BAC} = \frac{\pi}{3}$ ou $\widehat{BAC} = \frac{2\pi}{3}$.



10) $(AB) : 3x + 4y - 11 = 0$.

11) $\mathcal{D}_2 : 3x - 2y - 19 = 0$.

12) $(AB) : \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & 1 - 4t \\ y & = & 2 + 3t \end{array} \right.$.

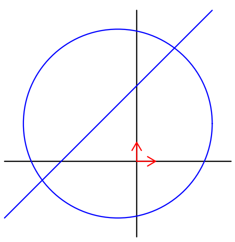
13) $(AB) : 5x - 2y - 1 = 0$ et $(CD) : 5x - 3y - 11 = 0$ se coupent au point de coordonnées $\left(-\frac{19}{5}; -10\right)$.

14) $\text{d}(M, \mathcal{D}) = \frac{54}{\sqrt{13}}$.

15) $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 4 = 0 \iff (x - 2)^2 + (y - (-1))^2 = 3^2$.

16) $\left\{ \begin{array}{rcl} x & = & 1 + 2\cos t \\ y & = & 3 + 2\sin t \end{array} \right.$.

17) $(-5; -1)$ et $(2; 6)$.



18) $x^2 + y^2 - 5y = 0$.

19) $A'(-5; 5)$.

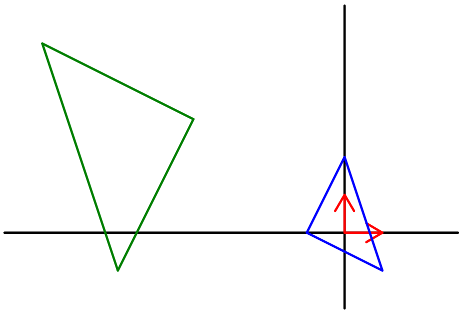
20) $A'(1; -4)$.

21) $A'(-2; 5)$.

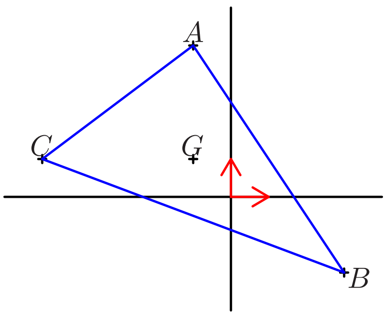
22) $H\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$ d'où $A'(-2; -1)$.

23)

24) $A'(-6;-1)$, $B'(-8;5)$ et $C'(-4;3)$.



25) $G(-1;1)$.



26) $\overrightarrow{i} = \frac{1}{2}\overrightarrow{u} + \frac{1}{2}\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{j} = \frac{1}{2}\overrightarrow{u} - \frac{1}{2}\overrightarrow{v}$.

27) $\overrightarrow{O'M} = 2\overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j} = 2\overrightarrow{u} + 0\overrightarrow{v}$.

28) On montre en utilisant la relation de Chasles que si I est le milieu de $[AB]$ alors $\overrightarrow{IG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{IC}$ d'où G appartient à la médiane issue de C.

29) On a $z_{\overrightarrow{u'}} = e^{-i\frac{2\pi}{3}}(3-2i) = \left(-\dfrac{3}{2} - \sqrt{3}\right) + \left(1 - \dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)i$.

30) $\overrightarrow{u'} = -y\overrightarrow{i} + x\overrightarrow{j}$.

31) On a $\overrightarrow{i} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\overrightarrow{u} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{j} = -\dfrac{1}{2}\overrightarrow{u} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\overrightarrow{v}$.

32) Les coordonnées polaires du point M sont $\rho = 10$ et $\theta = -\dfrac{5\pi}{6}$.

33) Les coordonnées polaires du point M sont $\rho = 4 - 2\sqrt{3}$ et $\theta = -\dfrac{2\pi}{3}$.

34) $A(0;0)$, $B(1;0)$, $C(1;1)$, $D(0;1)$, $I(1;\frac{1}{2})$, $J(\frac{2}{3};1)$, $K(\frac{1}{4};0)$, le triangle IJK est rectangle en I.

35) $\widehat{AOB} = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$.

36) On a $||2\overrightarrow{u} + 3\overrightarrow{v}||^2 - ||3\overrightarrow{u} + 2\overrightarrow{v}||^2 = 5\left(||\overrightarrow{v}||^2 - ||\overrightarrow{u}||^2\right)$.

37) On remarque que $MA^2 + MB^2 = (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})^2 + (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB})^2 = 2MI^2 + \frac{1}{2}AB^2$ avec I milieu de $[AB]$, le lieu géométrique cherché est le cercle de diamètre $[AB]$.

38) $A(0;0)$, $B(1;0)$, $C(0;1)$, $I(0;\frac{4}{3})$, $J(\frac{1}{2};\frac{1}{2})$, $K(\frac{4}{5};0)$, les points I, J et K sont alignés.

39) $\mathcal{A}(ABC) = \dfrac{17}{2}$.

40) On s'intéresse aux angles orientés $(\overrightarrow{u}, r_{\frac{\pi}{2}}(\overrightarrow{v}))$ et $(r_{\frac{\pi}{2}}(\overrightarrow{u}), \overrightarrow{v})$.

41) On a $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = -\dfrac{\pi}{3}[2\pi]$.

42) On montre que $\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$ d'où $AB = 2\sqrt{2}\,(3-\sqrt{3})$ et $AC = 4\,(\sqrt{3}-1)$.

43) L'aire du triangle est égale à $\dfrac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}$.

44) On utilise la formule d'addition pour la fonction tangente et on se ramène à la loi des sinus.

45) $\mathcal{D}_2 : 2x + 3y - 1 = 0$.

46) Un paramétrage de la droite $\mathcal{D}$ est $\left\{\begin{array}{rcrcr} x & = & -1 & - & t \\ y & = & 3 & + & 2t \end{array}\right.$, $t \in \mathbb{R}$.

47) $\mathcal{D}_1 : 4x - y - 8 = 0$, $\mathcal{D}_2 : 2x - 3y + 4 = 0$, $\mathcal{D}_3 : x + y - 6 = 0$ et $H\left(\frac{14}{5}; \frac{16}{5}\right)$.

48) $\mathcal{D}_1 : 8x - 2y - 21 = 0$, $\mathcal{D}_2 : 4x - 6y - 1 = 0$, $\mathcal{D}_3 : x + y - 5 = 0$ et $I\left(\frac{31}{10}; \frac{19}{10}\right)$.

49) La distance est $\dfrac{8}{\sqrt{13}}$.

50) $H\left(-\frac{17}{13}; \frac{22}{13}\right)$.

51) Le cercle $\mathcal{C}$ admet pour équation cartésienne $(x-3)^2 + (y-1)^2 = 26$.

52) La droite (AB) d'équation cartésienne $x - y - 1 = 0$ et le cercle $\mathcal{C}$ d'équation cartésienne $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 4$ admettent deux points d'intersection ayant pour coordonnées $(2;1)$ et $(0;-1)$.

53) On appelle I le milieu du segment $[AB]$, les cercles de diamètres $[AB]$ et $[CI]$ admettent deux points d'intersection $M(6;1)$ et $N(2;3)$. On en déduit $\mathcal{T}_1 : 3x - 4y - 14 = 0$ et $\mathcal{T}_2 : x - 2 = 0$.

54) On montre que le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ a pour coordonnées $\binom{-2}{4}$.

55) On montre que le milieu du segment $[MM']$ a pour coordonnées $(-1;2)$.

56) On obtient $M'(1-y; x+3)$.

57) On obtient $H(\frac{9}{25}x + \frac{12}{25}y + \frac{4}{5}; \frac{12}{25}x + \frac{16}{25}y - \frac{3}{5})$ et $M'(-\frac{7}{25}x + \frac{24}{25}y + \frac{8}{5}; \frac{24}{25}x + \frac{7}{25}y - \frac{6}{5})$.

58) On obtient $M'(-2x-3; -2y+9)$.

59) Le centre de l'homothétie h est le point Ω tel que $\overrightarrow{A\Omega} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$.

60) L'homothétie h a pour rapport $-\dfrac{2}{3}$ et son centre a pour affixe $\dfrac{6-i}{5}$.

61) Cercle de rayon $R' = \frac{R}{||\omega|^2 - R^2|}$ et de centre d'affixe $\omega' = \frac{\omega}{|\omega|^2 - R^2}$.