V. Équations différentielles

1 Primitive d'une fonction

Définition 1. *On appelle* **primitive** *d'une fonction f une solution de l'équation différentielle $y' = f$.*

Exercice 1. *Déterminer une solution de l'équation différentielle $y'(t) = 2t^3 - 2t + 5$ d'inconnue y de la variable t.*

Remarque 1. *On notera parfois abusivement $y' = 2t^3 - 2t + 5$ au lieu de $y'(t) = 2t^3 - 2t + 5$.*

Lorsque nous aurons défini la notion de ***continuité*** et développé la théorie de l'***intégration***, nous pourrons démontrer le théorème suivant :

Théorème 1. *Toute fonction f continue admet des primitives, si F_1 et F_2 sont deux primitives de la fonction f alors il existe une constante $k \in \mathbb{R}$ telle que $F_2 = F_1 + k$.*

Exercice 2. *Déterminer les primitives sur $\mathbb{R}$ de la fonction f définie par $f(t) = \dfrac{1}{t^2+1}$.*

Exercice 3. *Déterminer les primitives sur $]0; +\infty[$ de la fonction f définie par $f(t) = t\sqrt{t}$. (on pourra utiliser les fonctions puissances)*

Exercice 4. *Déterminer les primitives sur $\mathbb{R}$ de la fonction f définie par $f(t) = \dfrac{t}{t^2+1}$. En déduire que la fonction f admet une unique primitive F sur $\mathbb{R}$ telle que $F(1) = 1$. Exprimer $F(t)$.*

Exercice 5. *Dériver la fonction $F : t \mapsto (a + bt)e^t$. Montrer qu'il existe des valeurs de a et b telles que $F'(t) = te^t$. En déduire les primitives sur $\mathbb{R}$ de la fonction f définie par $f(t) = te^t$.*

Exercice 6. *Dériver la fonction $F : t \mapsto (a\cos t + b\sin t)e^t$. Montrer qu'il existe des valeurs de a et b telles que $F'(t) = (\sin t)e^t$. En déduire les primitives sur $\mathbb{R}$ de la fonction f définie par $f(t) = (\sin t)e^t$.*

2 Équations linéaires du premier ordre

Rappelons tout d'abord que nous avons défini la fonction exponentielle à partir d'une équation différentielle du premier ordre :

Définition 2. *L'équation différentielle $y' = y$ avec la condition initiale $y(0) = 1$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$, on l'appelle* **fonction exponentielle** *et on la note $t \mapsto \exp(t)$ ou $t \mapsto e^t$ avec $e = \exp(1)$.*

La fonction exponentielle va donc jouer un rôle fondamental dans la résolution des équations différentielles.

2.1 Équations linéaires du premier ordre sans second membre

Théorème 2. *On considère une fonction a continue sur un intervalle I à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, alors l'équation différentielle $y' + a(t)y = 0$ admet pour solutions les fonctions y définies par $y(t) = \lambda e^{-A(t)}$ où A est une primitive de a sur I et λ un nombre réel ou complexe.*

Exercice 7. *Résoudre les équations différentielles suivantes sur $\mathbb{R}$:*
- $y' - 2y = 0$
- $y' + (1 + it)y = 0$
- $(t^2 + 1)y' + y = 0$

Propriété 1. *On considère une fonction a continue sur un intervalle I à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, alors l'équation différentielle $y' + a(t)y = 0$ avec la* **condition initiale** *$y(t_0) = \alpha$ admet une unique solution.*

Exercice 8. *Résoudre l'équation différentielle $y' - \sqrt{t}y = 0$ sur $[0; +\infty[$ avec la condition initiale $y(1) = e$.*

Exercice 9. *Résoudre l'équation différentielle $y' = 0$ sur $\mathbb{R}$ avec la condition initiale $y'(0) = -1$.*

2.2 Équations linéaires du premier ordre avec second membre

La première méthode de résolution appelée ***méthode de variation de la constante*** consiste à chercher une solution de l'équation avec second membre sous une forme modifiée de la solution de l'équation sans second membre en remplaçant la constante multiplicative par une fonction :

Propriété 2. *On considère deux fonctions a et b continues sur un intervalle I à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, alors l'équation différentielle $y' + a(t)y = b(t)$ admet pour solutions les fonctions y définies par $y(t) = f(t)e^{-A(t)}$ où A est une primitive de a et f une primitive de la fonction be^A.*

Remarque 2. *La formule $f' = be^A$ n'est pas à connaître, en pratique on procède de la façon suivante :*
- *On cherche la solution générale y_H de l'équation sans second membre associée.*
- *On remplace la constante de y_H par une fonction $f(t)$ afin d'obtenir la forme de la solution y de l'équation avec second membre.*
- *On dérive la forme précédente.*
- *On remplace y et y' dans l'équation différentielle, on constate que $f(t)$ disparaît et on obtient $f'(t)$.*
- *On en déduit f puis y.*

Exercice 10. *Résoudre l'équation différentielle (E) : $y' + \dfrac{1}{t}y = t$ sur l'intervalle $]0; +\infty[$ en utilisant la méthode de variation de la constante.*

La seconde méthode de résolution appelée ***méthode de la solution particulière*** consiste à chercher une solution particulière de l'équation avec second membre ce qui permet ensuite de se ramener à une équation sans second membre :

Théorème 3. *On considère deux fonctions a et b continues sur un intervalle I à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, alors l'équation différentielle $y'+a(t)y=b(t)$ admet pour solutions les fonctions y définies par $y(t)=\tilde{y}(t)+y_H(t)$ où $\tilde{y}$ est une solution particulière de l'équation différentielle et y_H la solution générale de l'équation différentielle sans second membre associée.*

Exercice 11. *On considère l'équation différentielle $(E): y'+\dfrac{1}{t}y=t$ sur l'intervalle $]0;+\infty[$.*

- *Déterminer une solution particulière de l'équation différentielle (E) sous la forme $\tilde{y}(t)=mt^2$.*
- *En déduire les solutions de l'équation différentielle (E).*

Propriété 3. *On considère deux fonctions a et b continues sur un intervalle I à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, alors l'équation différentielle $y'+a(t)y=b(t)$ avec la condition initiale $y(t_0)=\alpha$ admet une unique solution.*

Exercice 12. *On considère l'équation différentielle $(E): y'+y=e^t$ sur l'intervalle $]0;+\infty[$.*

- *Déterminer une solution particulière de l'équation différentielle (E) sous la forme $\tilde{y}(t)=me^t$.*
- *En déduire les solutions de l'équation différentielle (E).*
- *Résoudre l'équation différentielle $y'+y=e^t$ avec la condition initiale $y(0)=1$.*

Le ***principe de superposition*** peut être utile lors de la recherche d'une solution particulière :

Propriété 4. *On considère trois fonctions a, b_1 et b_2 continues sur un intervalle I à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Si y_1 est une solution de l'équation différentielle $(E_1): y'+ay=b_1$ et y_2 une solution de l'équation différentielle $(E_2): y'+ay=b_2$ alors y_1+y_2 est une solution de l'équation différentielle $(E): y'+ay=b_1+b_2$.*

Exercice 13. *On considère l'équation différentielle $(E): y'-y=2\cos(t)$ sur $\mathbb{R}$.*

- *Déterminer une solution particulière de l'équation différentielle $y'-y=e^{it}$ sous la forme $\tilde{y}_1(t)=me^{it}$.*
- *Déterminer une solution particulière de l'équation différentielle $y'-y=e^{-it}$ sous la forme $\tilde{y}_2(t)=me^{-it}$.*
- *En déduire une solution particulière $\tilde{y}$ de l'équation différentielle (E).*
- *Résoudre l'équation différentielle (E).*

3 Équations linéaires du second ordre à coefficients constants

3.1 Équations linéaires du second ordre à coefficients constants sans second membre

Théorème 4. *On considère trois nombres a, b et c réels ou complexes avec $a\neq 0$ et on note $\Delta=b^2-4ac$, alors l'équation différentielle $ay''+by'+cy=0$ admet pour solutions les fonctions y définies par :*

- *Si $\Delta\neq 0$, $y(t)=\lambda e^{r_1 t}+\mu e^{r_2 t}$ avec λ et μ des nombres réels ou complexes et r_1, r_2 les solutions de l'équation $ar^2+br+c=0$.*
- *Si $\Delta=0$, $y(t)=(\lambda+\mu t)e^{r_0 t}$ avec λ et μ des nombres réels ou complexes et r_0 la solution double de l'équation $ar^2+br+c=0$.*

Définition 3. *L'équation du second degré associée à une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants est appelée* **équation caractéristique**.

Exercice 14. *Résoudre les équations différentielles suivantes :*

- $y''-3y'+2y=0$
- $y''+2y'+y=0$
- $y''+2iy'-2y=0$

Propriété 5. *On considère trois nombres a, b et c réels ou complexes avec $a \neq 0$, alors l'équation différentielle $ay'' + by' + c = 0$ avec la condition initiale $y(t_0) = \alpha$ et $y'(t_0) = \beta$ admet une unique solution.*

Exercice 15. *Résoudre l'équation différentielle $y'' - 5y' + 6y = 0$ avec la condition initiale $y(0) = 5$ et $y'(0) = 12$.*

Théorème 5. *On considère trois nombres a, b et c réels avec $a \neq 0$ et on note $\Delta = b^2 - 4ac$, alors l'équation différentielle $ay'' + by' + cy = 0$ admet pour solutions à valeurs réelles les fonctions y définies par :*

- *Si $\Delta = 0$, $y(t) = (\lambda t + \mu)e^{r_0 t}$ avec λ et μ des nombres réels et r_0 la solution double de l'équation $ar^2 + br + c = 0$.*
- *Si $\Delta > 0$, $y(t) = \lambda e^{r_1 t} + \mu e^{r_2 t}$ avec λ et μ des nombres réels et r_1, r_2 les solutions de l'équation $ar^2 + br + c = 0$.*
- *Si $\Delta < 0$, $y(t) = \left(A\cos\left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}t\right) + B\sin\left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}t\right)\right)e^{-\frac{b}{2a}t}$ avec A et B des nombres réels.*

Exercice 16. *Résoudre l'équation différentielle $y'' + 4y' + 5y = 0$ où y est une fonction à valeurs réelles.*

Corollaire 1. *Les solutions de l'équation différentielle $y'' + \omega^2 y = 0$ avec $\omega \in \mathbb{R}^*$ et y une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}$ sont les fonctions y définies par $y(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$ avec A et B des nombres réels.*

Exercice 17. *Résoudre l'équation différentielle $y'' + 2y = 0$ où y est une fonction à valeurs réelles.*

3.2 Équations linéaires du second ordre à coefficients constants avec second membre

La ***méthode de variation de la constante*** permet de se ramener à une équation différentielle linéaire d'ordre 1 :

Propriété 6. *On considère trois nombres a, b et c réels ou complexes avec $a \neq 0$ et une fonction d continue sur un intervalle I à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, alors l'équation différentielle $ay'' + by' + cy = d(t)$ admet pour solutions les fonctions y définies par $y(t) = f(t)e^{rt}$ où r est une solution de l'équation $ar^2 + br + c = 0$ et f une primitive d'une solution de l'équation différentielle $y' + \left(2r + \dfrac{b}{a}\right)y = \dfrac{1}{a}d(t)e^{-rt}$.*

Remarque 3. *L'équation différentielle $y' + \left(2r + \frac{b}{a}\right)y = \frac{1}{a}d(t)e^{-rt}$ n'est pas à connaître, en pratique il faut exprimer y sous la forme $y(t) = f(t)e^{rt}$, dériver deux fois puis remplacer dans l'équation différentielle afin d'obtenir une équation différentielle d'ordre 1 vérifiée par f'.*

Exercice 18. *On considère l'équation différentielle $(E) : y'' + 2y' + y = 2$ sur $\mathbb{R}$.*

- *Déterminer les solutions de l'équation sans second membre associée à (E).*
- *On pose $y(t) = f(t)e^{-t}$. Calculer $y'(t)$ puis $y''(t)$, remplacer dans l'équation différentielle (E) et en déduire l'équation différentielle vérifiée par f'.*
- *En déduire les solutions de l'équation différentielle (E).*

La ***méthode de la solution particulière*** permet de se ramener à une équation différentielle sans second membre :

Théorème 6. *On considère trois nombres a, b et c réels ou complexes avec $a \neq 0$ et une fonction d continue sur un intervalle I à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, alors l'équation différentielle $ay'' + by' + cy = d(t)$ admet pour solutions les fonctions y définies par $y(t) = \tilde{y}(t) + y_H(t)$ où $\tilde{y}$ est une solution particulière de l'équation différentielle et y_H la solution générale de l'équation différentielle sans second membre associée.*

Exercice 19. *On considère l'équation différentielle $(E) : y'' + 2y' + y = 2$ sur $\mathbb{R}$.*
- *Déterminer une solution particulière $\tilde{y}$ de l'équation différentielle (E) sous la forme d'une fonction constante.*
- *En déduire les solutions de l'équation différentielle (E).*

Propriété 7. *On considère trois nombres a, b et c réels ou complexes avec $a \neq 0$ et une fonction d continue sur un intervalle I à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, alors l'équation différentielle $ay''+by'+c = d(t)$ avec la condition initiale $y(t_0) = \alpha$ et $y'(t_0) = \beta$ admet une unique solution.*

Exercice 20. *On considère l'équation différentielle $(E) : y'' - 6y' + 8y = e^t$ sur $\mathbb{R}$.*
- *Déterminer une solution particulière de l'équation différentielle (E) sous la forme $\tilde{y}(t) = me^t$.*
- *En déduire les solutions de l'équation différentielle (E).*
- *Résoudre l'équation différentielle $y'' - 6y' + 8y = e^t$ avec la condition initiale $y(0) = 1$ et $y'(0) = 2$.*

Le principe de superposition peut être utile lors de la recherche d'une solution particulière :

Propriété 8. *On considère trois nombres a, b et c réels ou complexes avec $a \neq 0$ et deux fonctions d_1 et d_2 continues sur un intervalle I à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Si y_1 est une solution de l'équation différentielle $(E_1) : ay'' + by' + cy = d_1$ et y_2 une solution de l'équation différentielle $(E_2) : ay'' + by' + cy = d_2$ alors $y_1 + y_2$ est une solution de l'équation différentielle $(E) : ay'' + by' + cy = d_1 + d_2$.*

Exercice 21. *On considère l'équation différentielle $(E) : y'' + y' + y = 3\cos t - 2\sin t$ sur $\mathbb{R}$ dans laquelle y est à valeurs réelles.*
- *Exprimer $3\cos t - 2\sin t$ sous la forme $C_1e^{it} + C_2e^{-it}$ avec $C_1, C_2 \in \mathbb{C}$ en utilisant les formules d'Euler.*
- *Déterminer une solution particulière de l'équation différentielle $y'' + y' + y = (\frac{3}{2} + i)e^{it}$ sous la forme $\tilde{y}_1(t) = me^{it}$.*
- *Déterminer une solution particulière de l'équation différentielle $y'' + y' + y = (\frac{3}{2} - i)e^{-it}$ sous la forme $\tilde{y}_2(t) = me^{-it}$.*
- *En déduire une solution particulière $\tilde{y}$ de l'équation différentielle (E).*
- *Résoudre l'équation différentielle (E).*

Remarque 4. *Dans l'exercice précédent, il est plus rapide de chercher directement une solution particulière de l'équation différentielle (E) sous la forme $\tilde{y}(t) = \alpha\cos t + \beta\sin t$.*

Exercices supplémentaires

Exercice 22

Déterminer les primitives sur $\mathbb{R}$ de la fonction $f : t \mapsto \dfrac{1}{1+4t^2}$.

Exercice 23

Déterminer les primitives sur $\mathbb{R}$ de la fonction $f : t \mapsto 2\cos(3t) - 3\sin(2t)$.

Exercice 24

Déterminer les primitives sur $\mathbb{R}$ de la fonction $f : t \mapsto t^2(t^3+1)^3$.

Exercice 25

Déterminer les primitives sur $\mathbb{R}$ de la fonction $f : t \mapsto \dfrac{t}{(t^2+1)^2}$.

Exercice 26 ($\star$)

Déterminer les primitives sur $\mathbb{R}$ de la fonction $f : t \mapsto \dfrac{1-t}{1+t^2}$.

Exercice 27

Déterminer les primitives sur $]0;+\infty[$ de la fonction $f : t \mapsto t\ln t$.

Exercice 28 ($\star\star$)

Déterminer les primitives sur $]0;+\infty[$ de la fonction $f : t \mapsto \dfrac{\ln t}{t^2}$.

Exercice 29 ($\star\star$)

Déterminer les primitives sur $\mathbb{R}$ de la fonction $f : t \mapsto \dfrac{e^t-1}{e^t+1}$.

Exercice 30 ($\star$)

Déterminer les primitives sur $\mathbb{R}$ de la fonction $f : t \mapsto t^2e^t$.
(on pourra chercher $F(t)$ sous la forme $F(t) = (at^2+bt+c)e^t$)

Exercice 31 ($\star$)

Déterminer les primitives sur $\mathbb{R}$ de la fonction $f : t \mapsto (2\cos t - 3\sin t)e^{-t}$.
(on pourra chercher $F(t)$ sous la forme $F(t) = (a\cos t + b\sin t)e^{-t}$)

Exercice 32

Résoudre l'équation différentielle $y' - \sin(3t)y = 0$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 33

Résoudre l'équation différentielle $y' + \dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}y = 0$ sur $]-1;1[$ avec la condition initiale $y\left(\frac{1}{2}\right) = 1$.

Exercice 34

Résoudre l'équation différentielle $y' + \dfrac{1}{t}y = t$ sur l'intervalle $]-\infty;0[$ au moyen de la méthode de variation de la constante.

Exercice 35

Résoudre l'équation différentielle $y' + 2ty = t$ sur $\mathbb{R}$.
(on pourra chercher une solution particulière $\tilde{y}$ sous la forme d'un fonction constante)

Exercice 36

Résoudre l'équation différentielle $(t^2+1)y' + y = 1$ sur $\mathbb{R}$.
(on pourra chercher une solution particulière $\tilde{y}$ sous la forme d'un fonction constante)

Exercice 37

Résoudre l'équation différentielle $y' + y = t^2$ sur $\mathbb{R}$.
(on pourra chercher une solution particulière $\tilde{y}$ sous la forme d'un fonction trinôme du second degré)

Exercice 38 ($\star$)

Résoudre l'équation différentielle $y' - y = te^t$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 39 ($\star$)

Résoudre l'équation différentielle $y' + y = 2\cos(t)$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 40 ($\star$)

Résoudre l'équation différentielle $(t^2+1)y' + ty = \dfrac{1}{\sqrt{t^2+1}}$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 41 ($\star$)

Résoudre l'équation différentielle $(e^t+1)y' + e^t y = e^t - 1$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 42 ($\star$)

Résoudre l'équation différentielle $\cos(t)\ y' - \sin(t)\ y = 1$ sur l'intervalle $\left]-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right[$.

Exercice 43 ($\star\star$)

Résoudre l'équation différentielle $y' - \tan(t)\ y = \dfrac{1}{\cos(t)+1}$ sur l'intervalle $\left]-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right[$.

Exercice 44 ($\star\star$)

Résoudre l'équation différentielle $(t-1)^2y' + (t-2)y = 0$ sur l'intervalle $]1;+\infty[$.

Exercice 45

Résoudre l'équation différentielle $y'' + y' - 2y = 0$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 46

Résoudre l'équation différentielle $y'' - 2y' + y = 0$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 47

Résoudre l'équation différentielle $y'' - 2y' + 2y = 0$ sur $\mathbb{R}$ où y est à valeurs réelles.

Exercice 48

Résoudre l'équation différentielle $y'' - y' - 2y = 0$ sur $\mathbb{R}$ avec les conditions initiales $y(0) = 1$ et $y'(0) = 1$.

Exercice 49

Résoudre l'équation différentielle $y'' + y' - 2y = e^t$ sur $\mathbb{R}$ au moyen de la méthode de variation de la constante.

Exercice 50

Résoudre l'équation différentielle $y'' - y' - 2y = e^t$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 51 $(\star)$

Résoudre l'équation différentielle $y'' + 2y' - 3y = 1 - 2t - 3t^2$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 52 $(\star)$

Résoudre l'équation différentielle $y'' - 4y' + 4y = te^{2t}$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 53 $(\star)$

Résoudre l'équation différentielle $y'' + y = e^t + e^{-t}$ sur $\mathbb{R}$ où y est à valeurs réelles.

Exercice 54

Résoudre l'équation différentielle $y'' + 9y = 5\cos(2t)$ sur $\mathbb{R}$ avec les conditions initiales $y(0) = 2$ et $y'(0) = 2$.

Exercice 55 $(\star)$

Résoudre l'équation différentielle $y'' + 4y' + 5y = \cos(t)\ e^{-2t}$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 56 $(\star\star\star)$

On considère deux solutions y_1 et y_2 d'une équation différentielle linéaire d'ordre 2 sans second membre $a(t)y'' + b(t)y' + c(t)y = 0$. Montrer que $w = y_1y_2' - y_1'y_2$ est solution d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1 que l'on déterminera.

Réponses

1) $y(t) = \frac{1}{2}t^4 - t^2 + 5t$.

2) $F(t) = \arctan t + Cte$.

3) $F(t) = \frac{2}{5}t^2\sqrt{t} + Cte$.

4) $F(t) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{t^2+1}{2}\right) + 1$.

5) $F(t) = (t-1)e^t$.

6) $F(t) = \frac{1}{2}(\sin t - \cos t)e^t$.

7) $y(t) = \lambda e^{2t}$, $\lambda(\cos\frac{t^2}{2} + i\sin\frac{t^2}{2})e^{-t}$, $\lambda e^{-\arctan t}$.

8) $y(t) = e^{\frac{1}{3}+\frac{2}{3}t\sqrt{t}}$.

9) aucune solution.

10) $f'(t) = t^2$ d'où $y(t) = \frac{1}{3}t^2 + \frac{Cte}{t}$.

11) $\tilde{y}(t) = \frac{1}{3}t^2$ d'où $y(t) = \frac{1}{3}t^2 + \frac{Cte}{t}$.

12) $y(t) = \frac{1}{2}\left(e^t + e^{-t}\right)$.

13) $\tilde{y}_1(t) = -\frac{1}{2}(1+i)e^{it}$ et $\tilde{y}_2(t) = \frac{1}{2}(-1+i)e^{-it}$ d'où $\tilde{y}(t) = -\cos t + \sin t$ et $y(t) = -\cos t + \sin t + \lambda e^t$.

14) $y(t) = \lambda e^t + \mu e^{2t}$, $(\lambda + \mu t)e^{-t}$, $\lambda e^{(1-i)t} + \mu e^{(-1-i)t}$.

15) $y(t) = 3e^{2t} + 2e^{3t}$.

16) $y(t) = (A\cos t + B\sin t)e^{-2t}$.

17) $y(t) = A\cos\left(\sqrt{2}t\right) + B\sin\left(\sqrt{2}t\right)$.

18) f' vérifie l'équation différentielle $y' = 2e^t$ d'où $y(t) = 2 + (\lambda + \mu t)e^{-t}$.

19) $\tilde{y}(t) = 2$ d'où $y(t) = 2 + (\lambda + \mu t)e^{-t}$.

20) $y(t) = \frac{1}{3}e^t + \frac{1}{2}e^{2t} + \frac{1}{6}e^{4t}$.

21) $\tilde{y}_1(t) = \left(1 - \frac{3}{2}i\right)e^{it}$ et $\tilde{y}_2(t) = \left(1 + \frac{3}{2}i\right)e^{-it}$ d'où $\tilde{y}(t) = 2\cos t + 3\sin t$ et $y(t) = 2\cos t + 3\sin t + \left(A\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + B\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)\right)e^{-\frac{1}{2}t}$.

22) $F(t) = \frac{1}{2}\arctan(2t) + Cte$.

23) $F(t) = \frac{2}{3}\sin(3t) + \frac{3}{2}\cos(2t) + Cte$.

24) $F(t) = \frac{1}{12}(t^3+1)^4 + Cte$.

25) $F(t) = \frac{1}{2(t^2+1)} + Cte$.

26) $F(t) = \arctan t - \frac{1}{2}\ln(1+t^2) + Cte$.

27) $F(t) = \frac{1}{2}(\ln t)^2 + Cte$.

28) $F(t) = -\frac{1}{t} - \frac{\ln t}{t} + Cte$.

29) $F(t) = -t + 2\ln\left(e^t + 1\right) + Cte$.

30) $F(t) = (t^2 - 2t + 2)e^t + Cte$.

31) $F(t) = \left(\frac{1}{2}\cos t + \frac{5}{2}\sin t\right)e^{-t} + Cte$.

32) $y(t) = \lambda e^{-\frac{1}{3}\cos(3t)}$.

33) $y(t) = e^{\arccos(t) - \frac{\pi}{3}}$.

34) $y(t) = \frac{1}{3}t^2 + \frac{Cte}{t}$.

35) $y(t) = \dfrac{1}{2} + \lambda e^{-t^2}$.

36) $y(t) = 1 + \lambda e^{-\arctan(t)}$.

37) $y(t) = t^2 - 2t + 2 + \lambda e^{-t}$.

38) $y(t) = \left(\dfrac{t^2}{2} + \lambda\right) e^t$.

39) $y(t) = \cos t + \sin t + \lambda e^{-t}$.

40) $y(t) = \dfrac{\arctan(t) + \lambda}{\sqrt{t^2+1}}$.

41) $y(t) = \dfrac{e^t - t + \lambda}{e^t + 1}$.

42) $y(t) = \dfrac{t + \lambda}{\cos t}$.

43) $y(t) = \dfrac{t - \tan\frac{t}{2} + \lambda}{\cos t}$ en remarquant que $\dfrac{\cos t}{\cos t + 1} = 1 - \dfrac{1}{2(\cos\frac{t}{2})^2}$.

44) $y(t) = \dfrac{\lambda e^{-\frac{1}{t-1}}}{t-1}$ en remarquant que $\dfrac{t-2}{(t-1)^2} = \dfrac{1}{t-1} - \dfrac{1}{(t-1)^2}$.

45) $y(t) = \lambda e^t + \mu e^{-2t}$.

46) $y(t) = (\lambda + \mu t)e^t$.

47) $y(t) = (A\cos t + B\sin t)e^t$.

48) $y(t) = \dfrac{1}{3}e^{-t} + \dfrac{2}{3}e^{2t}$.

49) $y(t) = \lambda e^{-2t} + \mu e^t + \frac{1}{3}te^t$.

50) $y(t) = \lambda e^{-t} + \mu e^{2t} - \frac{1}{2}e^t$.

51) $y(t) = \dfrac{5}{3} + 2t + t^2 + \lambda e^t + \mu e^{-3t}$.

52) $y(t) = \left(\lambda + \mu t + \dfrac{t^3}{6}\right) e^{2t}$.

53) $y(t) = \frac{1}{2}e^t + \frac{1}{2}e^{-t} + \lambda\cos t + \mu\sin t$.

54) $y(t) = \cos(2t) + \cos(3t) + \dfrac{2}{3}\sin(3t)$.

55) $y(t) = \left(\left(\dfrac{t}{2} + \lambda\right)\sin t + \mu\cos t\right) e^{-2t}$ en remarquant que $\cos t$ est la partie réelle de e^{it}.

56) $a(t)w' + b(t)w = 0$.