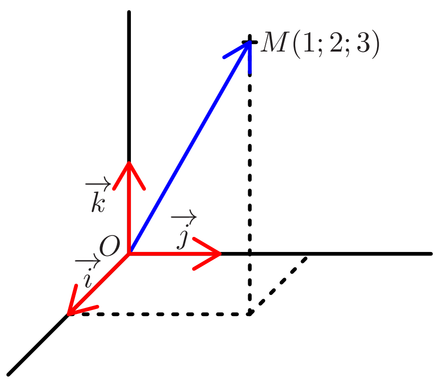
VI. Géométrie de l'espace

1 Repérage dans l'espace

Définition 1. *On appelle* **base** *de l'espace un triplet* $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ *avec* $\vec{i}$, $\vec{j}$ *et* $\vec{k}$ *trois vecteurs non coplanaires de l'espace. Tout vecteur* $\vec{u}$ *de l'espace s'exprime de manière unique comme combinaison linéaire des vecteurs* $\vec{i}$, $\vec{j}$ *et* $\vec{k}$ *sous la forme* $\vec{u} = \lambda\vec{i} + \mu\vec{j} + \nu\vec{k}$ *avec* λ, μ *et* ν *des nombres réels. Les nombres* λ, μ *et* ν *sont appelés* **coordonnées** *du vecteur* $\vec{u}$ *dans la base* $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, *le nombre* λ *est appelé* **abscisse** *du vecteur* $\vec{u}$ *dans la base* $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, *le nombre* μ *est appelé* **ordonnée** *du vecteur* $\vec{u}$ *dans la base* $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ *et le nombre* ν *est appelé* **cote** *du vecteur* $\vec{u}$ *dans la base* $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. *On note* $\vec{u}\begin{pmatrix}\lambda\\ \mu\\ \nu\end{pmatrix}$.

Remarque 1. *Dans la base* $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, *on a* $\vec{i}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $\vec{j}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ *et* $\vec{k}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$.

Définition 2. *On appelle* **repère cartésien** *de l'espace un quadruplet* $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, *avec* O *un point du plan et* $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ *une base de l'espace. Le point* O *est appelé* **origine** *du repère, la droite* $(O, \vec{i})$ *est appelée* **axe des abscisses**, *la droite* $(O, \vec{j})$ *est appelée* **axe des ordonnées** *et la droite* $(O, \vec{k})$ *est appelée* **axe des cotes**. *Si les vecteurs* $\vec{i}$, $\vec{j}$ *et* $\vec{k}$ *sont orthogonaux deux à deux, le repère est dit* **orthogonal** *si de plus ils sont de même norme alors le repère est dit* **orthonormal**. *Tout point* M *de l'espace est repéré de manière unique par trois nombres* x, y *et* z *tels que* $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$. *Les nombres* x, y *et* z *sont appelés* **coordonnées** *du point* M *dans le repère* $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, *le nombre* x *est appelé* **abscisse** *du point* M *dans le repère* $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, *le nombre* y *est appelé* **ordonnée** *du point* M *dans le repère* $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ *et le nombre* z *est appelé* **cote** *du point* M *dans le repère* $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. *On note* $M(x; y; z)$.



Remarque 2. *On admet que l'espace tout comme le plan peut être orienté, on utilisera la règle du* bonhomme d'Ampère *ou du* tire-bouchon de Maxwell *pour définir une* **base orthonormale directe**.

2 Produit scalaire, produit vectoriel et produit mixte dans l'espace

2.1 Produit scalaire

Définition 3. *On appelle* **produit scalaire** *de deux vecteurs* $\overrightarrow{u}$ *et* $\overrightarrow{v}$ *de l'espace :*

$$\boxed{\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \begin{cases} ||\overrightarrow{u}|| \times ||\overrightarrow{v}|| \times \cos\left(\widehat{\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}}\right) & si\ \overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}\ et\ \overrightarrow{v} \neq \overrightarrow{0} \\ 0 & si\ \overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}\ ou\ \overrightarrow{v} = \overrightarrow{0} \end{cases}}$$

Remarque 3. *On ne peut pas définir la notion d'angle orienté de deux vecteurs non nuls dans l'espace.*

Remarque 4. *Le produit scalaire est symétrique car* $\boxed{\overrightarrow{v}.\overrightarrow{u} = \overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}}$.

Remarque 5. *Le produit scalaire est nul si et seulement si les vecteurs* $\overrightarrow{u}$ *et* $\overrightarrow{v}$ *sont orthogonaux.*

Propriété 1. *Dans l'espace muni d'une base orthonormale, on considère deux vecteurs* $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ *et* $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$, *alors :*

$$\boxed{\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = xx' + yy' + zz'}$$

Propriété 2. **Bilinéarité du produit scalaire**

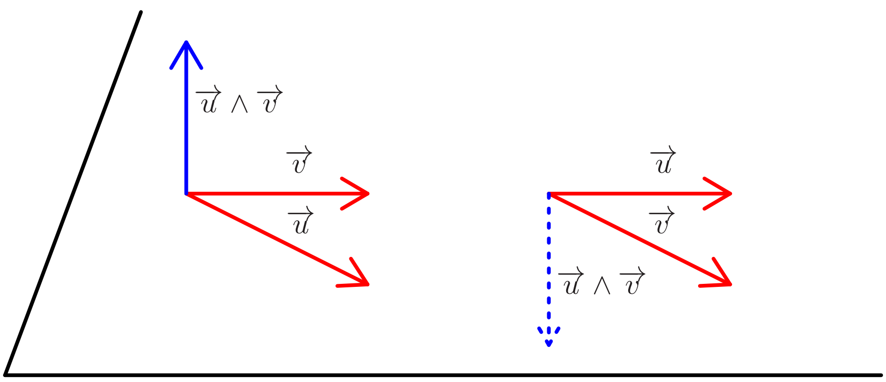
On considère trois vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ *et* $\overrightarrow{w}$ *de l'espace et deux nombres réels* λ *et* μ, *alors :*

$$\boxed{(\lambda\overrightarrow{u} + \mu\overrightarrow{v}).\overrightarrow{w} = \lambda(\overrightarrow{u}.\overrightarrow{w}) + \mu(\overrightarrow{v}.\overrightarrow{w})}$$

2.2 Produit vectoriel

Définition 4. *On appelle* **produit vectoriel** *de deux vecteurs* $\overrightarrow{u}$ *et* $\overrightarrow{v}$ *de l'espace le vecteur* $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$ *tel que :*

- $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$ *si* $\overrightarrow{u}$ *et* $\overrightarrow{v}$ *sont colinéaires.*
- *le vecteur* $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$ *est orthogonal aux vecteurs* $\overrightarrow{u}$ *et* $\overrightarrow{v}$, $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v})$ *est une base directe et* $||\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}|| = ||\overrightarrow{u}|| \times ||\overrightarrow{v}|| \times \sin\left(\widehat{\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}}\right)$ *si* $\overrightarrow{u}$ *et* $\overrightarrow{v}$ *ne sont pas colinéaires.*



Remarque 6. *Le produit vectoriel est antisymétrique car* $\boxed{\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{u} = -\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}}$.

Remarque 7. *Le produit vectoriel est nul si et seulement si les vecteurs* $\overrightarrow{u}$ *et* $\overrightarrow{v}$ *sont colinéaires.*

Remarque 8. *Si* $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ *est une base orthonormale directe de l'espace alors* $\overrightarrow{i} \wedge \overrightarrow{j} = \overrightarrow{k}$, $\overrightarrow{j} \wedge \overrightarrow{k} = \overrightarrow{i}$ *et* $\overrightarrow{k} \wedge \overrightarrow{i} = \overrightarrow{j}$.

Exercice 1. *On considère une base orthonormale directe* $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ *de l'espace, calculer* $(\overrightarrow{i} \wedge \overrightarrow{i}) \wedge \overrightarrow{j}$ *et* $\overrightarrow{i} \wedge (\overrightarrow{i} \wedge \overrightarrow{j})$.

Propriété 3. Bilinéarité du produit vectoriel

On considère trois vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ *et* $\overrightarrow{w}$ *de l'espace et deux nombres réels* λ *et* μ, *alors :*

$$\boxed{\overrightarrow{u} \wedge (\lambda \overrightarrow{v} + \mu \overrightarrow{w}) = \lambda(\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}) + \mu(\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{w})}$$

Propriété 4. *Dans l'espace muni d'une base orthonormale directe* $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$, *on considère deux vecteurs* $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ *et* $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$, *alors :*

$$\boxed{\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = (yz' - zy')\overrightarrow{i} + (zx' - xz')\overrightarrow{j} + (xy' - yx')\overrightarrow{k}}$$

Exercice 2. *Dans l'espace muni d'une base orthonormale directe, on considère les vecteurs* $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ *et* $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$. *Calculer les coordonnées du vecteur* $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$.

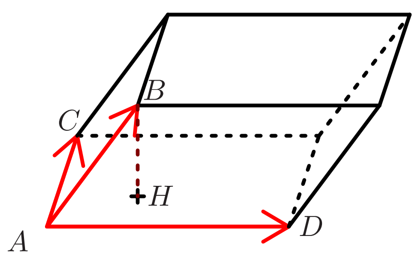
2.3 Produit mixte

Définition 5. *On appelle* **produit mixte** *de trois vecteurs* $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ *et* $\overrightarrow{w}$ *de l'espace :*

$$\boxed{[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}] = \overrightarrow{u}.(\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{w})}$$

Remarque 9. *Le produit mixte est nul si et seulement si les vecteurs* $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ *et* $\overrightarrow{w}$ *sont coplanaires.*

Propriété 5. *On considère quatre points* A, B, C *et* D *non coplanaires de l'espace et on note* H *le projeté orthogonal du point* B *sur le plan* (ACD), *alors* $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}] = [\overrightarrow{HB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}] = \pm HB \times ||\overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{AD}||$.



Exercice 3. *On considère une base orthonormale directe* $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ *de l'espace, calculer* $[\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}]$.

Propriété 6. *Dans l'espace muni d'une base orthonormale directe, on considère trois vecteurs* $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ *et* $\overrightarrow{w}\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix}$, *alors :*

$$\boxed{[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}] = (xy'z'' + yz'x'' + zx'y'') - (zy'x'' + xz'y'' + yx'z'')}$$

Propriété 7. **Antisymétrie du produit mixte**
On considère trois vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ *et* $\overrightarrow{w}$ *de l'espace, alors :*

$$\boxed{[\overrightarrow{u},\overrightarrow{w},\overrightarrow{v}]=-[\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w}]\quad;\quad[\overrightarrow{v},\overrightarrow{u},\overrightarrow{w}]=-[\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w}]\quad;\quad[\overrightarrow{w},\overrightarrow{v},\overrightarrow{u}]=-[\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w}]}$$

Exercice 4. *Montrer que* $\overrightarrow{u}.(\overrightarrow{v}\wedge\overrightarrow{w})=(\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{v}).\overrightarrow{w}$.

Propriété 8. **Trilinéarité du produit mixte**

On considère quatre vecteurs $\overrightarrow{u_1}$, $\overrightarrow{u_2}$, $\overrightarrow{v}$ *et* $\overrightarrow{w}$ *de l'espace et deux nombres réels* λ *et* μ, *alors :*

$$\boxed{[\lambda\overrightarrow{u_1}+\mu\overrightarrow{u_2},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w}]=\lambda[\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w}]+\mu[\overrightarrow{u_2},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w}]}$$

Exercice 5. *Simplifier* $[\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v},\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v},\overrightarrow{w}]$.

3 Droites, plans et sphères de l'espace

3.1 Plans

Propriété 9. **Équation cartésienne d'un plan**

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal, les coordonnées $(x;y;z)$ *des points d'un plan* $\mathcal{P}$ *vérifient une équation de la forme* $ax+by+cz+d=0$ *avec* a, b, c *et* d *des nombres réels et* $(a;b;c)\neq(0;0;0)$, *cette équation est appelée une* **équation cartésienne** *du plan* $\mathcal{P}$.

Réciproquement, l'ensemble des points de coordonnées $(x;y;z)$ *vérifiant une équation de la forme* $ax+by+cz+d=0$ *avec* a, b, c *et* d *des nombres réels et* $(a;b;c)\neq(0;0;0)$ *est un plan.*

Exercice 6. *Dans l'espace muni d'un repère orthonormal, on considère les points* $A(2;1;1)$, $B(3;2;2)$ *et* $C(1;-1;-3)$ *ainsi qu'un point* $M(x;y;z)\in(ABC)$. *Calculer* $[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AM}]$, *en déduire une équation cartésienne du plan* (ABC).

Propriété 10. *Dans l'espace muni d'un repère orthonormal, on considère le plan* $\mathcal{P}$ *d'équation cartésienne* $ax+by+cz+d=0$ *avec* a, b, c *et* d *des nombres réels et* $(a;b;c)\neq(0;0;0)$. *Alors le vecteur* $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ *est un* **vecteur normal** *au plan* $\mathcal{P}$.

Remarque 10. *Dans le cas où le vecteur* $\overrightarrow{n}$ *est normé* ($a^2+b^2+c^2=1$), *l'équation cartésienne* $ax+by+cz+d=0$ *est appelée* **équation normale** *du plan* $\mathcal{P}$.

Exercice 7. *Dans l'espace muni d'un repère orthonormal, on considère le plan* $\mathcal{P}_1$ *d'équation* $3x-2y+5z=4$, *le point* $A(-1;3;2)$ *et le plan* $\mathcal{P}_2$ *passant par* A *et parallèle au plan* $\mathcal{P}_1$. *Déterminer une équation cartésienne du plan* $\mathcal{P}_2$.

Propriété 11. **Paramétrage d'un plan**

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal on considère un plan $\mathcal{P}$ *passant par le point* $A(x_A; y_A; z_A)$ *et admettant* $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} x_{\overrightarrow{u}} \\ y_{\overrightarrow{u}} \\ z_{\overrightarrow{u}} \end{pmatrix}$ *et* $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} x_{\overrightarrow{v}} \\ y_{\overrightarrow{v}} \\ z_{\overrightarrow{v}} \end{pmatrix}$ *pour vecteurs directeurs (*$\overrightarrow{u}$ *et* $\overrightarrow{v}$ *ne sont pas colinéaires). Alors le point* $M(x; y; z)$ *appartient au plan* $\mathcal{P}$ *si et seulement si il existe* $t_1 \in \mathbb{R}$ *et* $t_2 \in \mathbb{R}$ *tel que :*

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & = & x_A & + & t_1 \ x_{\overrightarrow{u}} & + & t_2 \ x_{\overrightarrow{v}} \\ y & = & y_A & + & t_1 \ y_{\overrightarrow{u}} & + & t_2 \ y_{\overrightarrow{v}} \\ z & = & z_A & + & t_1 \ z_{\overrightarrow{u}} & + & t_2 \ z_{\overrightarrow{v}} \end{array}\right.$$

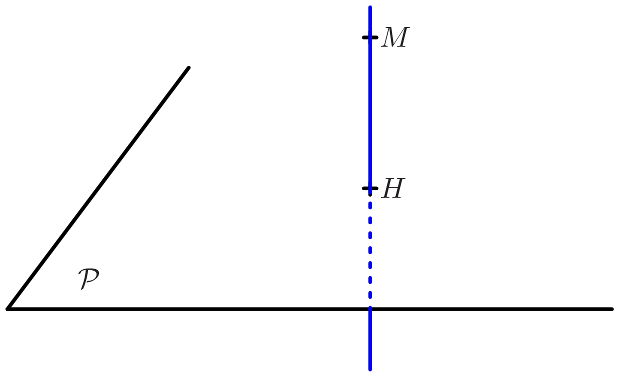
Cette écriture est appelée un **paramétrage** *du plan* $\mathcal{P}$*.*

Exercice 8. *Dans l'espace muni d'un repère orthonormal, déterminer un paramétrage du plan passant par les points* $A(1; 2; 3)$,$B(-1; 2; 1)$ *et* $C(5; 4; 3)$.

Propriété 12. **Distance d'un point à un plan**

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal, on considère un plan $\mathcal{P}$ *d'équation cartésienne* $ax + by + cz + d = 0$ *avec* a*,* b*,* c *et* d *des nombres réels et* $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \neq \overrightarrow{0}$*. Alors la distance d'un point* $M(x_M; y_M; z_M)$ *au plan* $\mathcal{P}$ *est :*

$$\boxed{\mathrm{d}(M, \mathcal{P}) = \frac{|ax_M + by_M + cz_M + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}}$$



Remarque 11. *La distance de l'origine du repère au plan* $\mathcal{P}$ *est* $\frac{|d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$.

Exercice 9. *Dans l'espace muni d'un repère orthonormal, déterminer la distance du point* $M(1; 1; 1)$ *au plan* $\mathcal{P}$ *d'équation* $3x - 4y + 5z + 9 = 0$.

3.2 Droites

Propriété 13. Paramétrage d'une droite

On considère une droite $\mathcal{D}$ de l'espace passant par le point $A(x_A; y_A; z_A)$ et admettant $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} x_{\overrightarrow{u}} \\ y_{\overrightarrow{u}} \\ z_{\overrightarrow{u}} \end{pmatrix}$ pour vecteur directeur. Alors le point $M(x; y; z)$ appartient à la droite $\mathcal{D}$ si et seulement si il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\left\{ \begin{array}{ccccc} x & = & x_A & + & t \quad x_{\overrightarrow{u}} \\ y & = & y_A & + & t \quad y_{\overrightarrow{u}} \\ z & = & z_A & + & t \quad z_{\overrightarrow{u}} \end{array} \right.$$

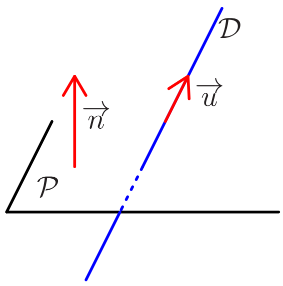
Cette écriture est appelée un **paramétrage** *de la droite $\mathcal{D}$.*

Exercice 10. *Dans l'espace muni d'un repère orthonormal, déterminer un paramétrage de la droite passant par les points $A(1; 2; 3)$ et $B(3; 2; 1)$.*

Propriété 14. Intersection d'une droite et d'un plan

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal, on considère une droite $\mathcal{D}$ admettant $\overrightarrow{u}$ pour vecteur directeur et un plan $\mathcal{P}$ admettant $\overrightarrow{n}$ pour vecteur normal. Alors l'intersection de la droite $\mathcal{D}$ et du plan $\mathcal{P}$ est :

- *l'ensemble vide ou la droite $\mathcal{D}$ si $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{n} = 0$.*
- *un point si $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{n} \neq 0$.*



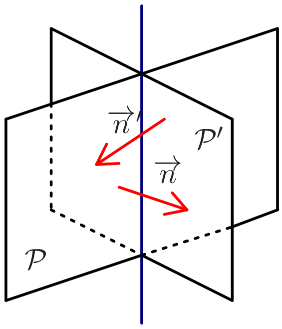
Exercice 11. *Dans l'espace muni d'un repère orthonormal, on considère les points $A(-2; 3; 1)$, $B(-1; 2; 2)$, $C(1; 1; 1)$, $D(-2; 0; 2)$ et $E(-3; -1; 3)$ ainsi que le plan (ABC) et la droite (DE).*

— *Déterminer une équation cartésienne du plan (ABC).*
— *Déterminer un paramétrage de la droite (DE)*
— *Montrer que le plan (ABC) et la droite (DE) admettent un unique point d'intersection I.*
— *On note $(x; y; z)$ les coordonnées du point I. Remplacer x, y et z dans l'équation cartésienne du plan (ABC) en utilisant le paramétrage de la droite (DE) afin de déterminer les coordonnées du point I.*

Propriété 15. **Intersection de deux plans**

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal, on considère un plan $\mathcal{P}$ admettant $\overrightarrow{n}$ pour vecteur normal et un plan $\mathcal{P}'$ admettant $\overrightarrow{n}'$ pour vecteur normal. Alors :

- *Si les vecteurs $\overrightarrow{n}$ et $\overrightarrow{n}'$ sont colinéaires, les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont parallèles ou confondus.*
- *Si les vecteurs $\overrightarrow{n}$ et $\overrightarrow{n}'$ ne sont pas colinéaires, les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont sécants suivant une droite $\mathcal{D}$ admettant $\overrightarrow{n} \wedge \overrightarrow{n}'$ pour vecteur directeur.*



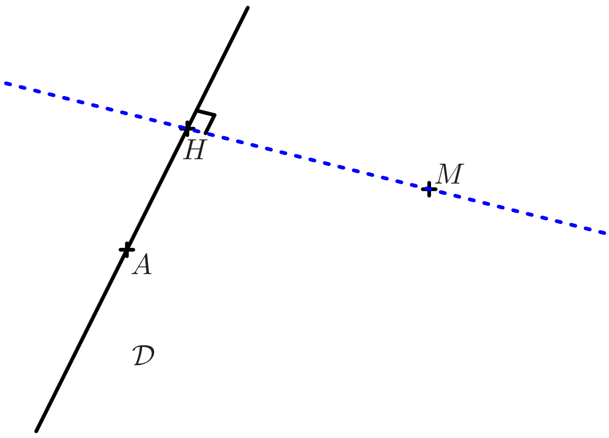
Exercice 12. *Dans l'espace muni d'un repère orthonormal, on considère les plans $\mathcal{P} : 2x + 3y + z = 1$ et $\mathcal{P}' : x + y + z = 2$.*

— *Montrer que les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont sécants suivant une droite $\mathcal{D}$.*
— *Déterminer un vecteur directeur de la droite $\mathcal{D}$.*
— *Déterminer un point de la droite $\mathcal{D}$. (on pourra chercher un point de cote 0)*
— *En déduire un paramétrage de la droite $\mathcal{D}$.*

Propriété 16. **Distance d'un point à une droite**

Dans l'espace, on considère une droite $\mathcal{D}$ passant par le point A et admettant $\overrightarrow{u}$ pour vecteur directeur. Alors la distance d'un point M à la droite $\mathcal{D}$ est :

$$\boxed{\mathrm{d}(M, \mathcal{D}) = \frac{||\overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{u}||}{||\overrightarrow{u}||}}$$



Exercice 13. *Dans l'espace muni d'un repère orthonormal, déterminer la distance du point $M(1; 1; 1)$ à la droite $\mathcal{D}$ passant par le point $A(1; 6; 3)$ et admettant $\overrightarrow{u} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ pour vecteur directeur.*

3.3 Sphères

Propriété 17. Équation cartésienne d'une sphère

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal, les coordonnées $(x; y; z)$ *des points d'une sphère* $\mathcal{S}$ *de centre* $\Omega(x_\Omega; y_\Omega; z_\Omega)$ *et de rayon* R *vérifient une équation de la forme* $(x - x_\Omega)^2 + (y - y_\Omega)^2 + (z - z_\Omega)^2 = R^2$*, cette équation est appelée une* **équation cartésienne** *de la sphère* $\mathcal{S}$*.*

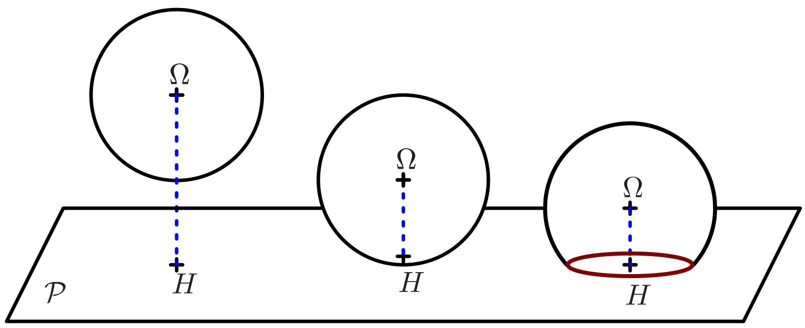
Réciproquement, l'ensemble des points de coordonnées $(x; y; z)$ *vérifiant une équation de la forme* $(x - x_\Omega)^2 + (y - y_\Omega)^2 + (z - z_\Omega)^2 = R^2$ *avec* x_ω*,* y_ω*,* z_ω *et* R *des nombres réels et* $R \geqslant 0$ *est une sphère* $\mathcal{S}$ *de centre* $\Omega(x_\Omega; y_\Omega; z_\Omega)$ *et de rayon* R*.*

Exercice 14. *Dans l'espace muni d'un repère orthonormal, montrer que l'équation cartésienne* $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y - 2z - 10 = 0$ *est l'équation d'une sphère dont on déterminera le centre ainsi que le rayon.*

Propriété 18. Intersection d'un plan et d'une sphère

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal, on considère un plan $\mathcal{P}$ *ainsi qu'une sphère* $\mathcal{S}$ *de centre* Ω *et de rayon* $R > 0$*. Alors :*

- *Si* $\mathrm{d}(\Omega, \mathcal{P}) > R$*, le plan* $\mathcal{P}$ *et la sphère* $\mathcal{S}$ *n'ont aucun point d'intersection.*
- *Si* $\mathrm{d}(\Omega, \mathcal{P}) = R$*, le plan* $\mathcal{P}$ *et la sphère* $\mathcal{S}$ *ont un unique point d'intersection qui est le projeté orthogonal de* Ω *sur* $\mathcal{P}$ *et le plan* $\mathcal{P}$ *est dit tangent en ce point à la sphère* $\mathcal{S}$*.*
- *Si* $\mathrm{d}(\Omega, \mathcal{P}) < R$*, l'intersection du plan* $\mathcal{P}$ *et de la sphère* $\mathcal{S}$ *est un cercle du plan* $\mathcal{P}$ *de centre* H *projeté orthogonal de* Ω *sur le plan* $\mathcal{P}$ *et de rayon* $r = \sqrt{R^2 - \mathrm{d}(\Omega, \mathcal{P})^2}$*.*

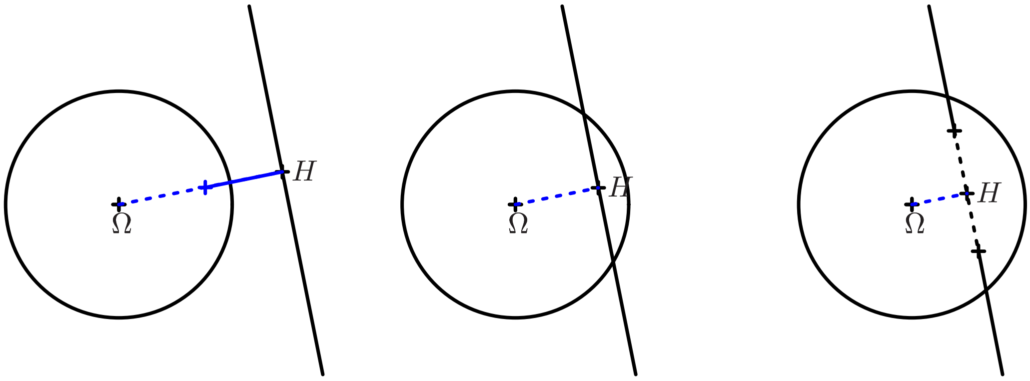


Exercice 15. *Dans le plan muni d'un repère orthonormal on considère le plan* $\mathcal{P} : x + 2y + 3z = 6$ *et la sphère* $\mathcal{S}$ *de centre* $\Omega(0; -1; -2)$ *et de rayon* 4*.*

— *Montrer que l'intersection du plan* $\mathcal{P}$ *et de la sphère* $\mathcal{S}$ *est un cercle.*
— *Déterminer le rayon* r *de ce cercle.*
— *Déterminer le centre* H *de ce cercle.*

Propriété 19. **Intersection d'une droite et d'une sphère**

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal, on considère une droite $\mathcal{D}$ ainsi qu'une sphère $\mathcal{S}$ de centre Ω et de rayon $R > 0$. Alors :
- *Si $\mathrm{d}(\Omega, \mathcal{D}) > R$, la droite $\mathcal{D}$ et la sphère $\mathcal{S}$ n'ont aucun point d'intersection.*
- *Si $\mathrm{d}(\Omega, \mathcal{D}) = R$, la droite $\mathcal{D}$ et la sphère $\mathcal{S}$ ont un unique point d'intersection qui est le projeté orthogonal de Ω sur $\mathcal{D}$ et la droite $\mathcal{D}$ est dit tangente en ce point à la sphère $\mathcal{S}$.*
- *Si $\mathrm{d}(\Omega, \mathcal{D}) < R$, la droite $\mathcal{D}$ et la sphère $\mathcal{S}$ ont deux points d'intersection.*



Exercice 16. *Dans l'espace muni d'un repère orthonormal, on considère les points $A(-1; 3; 2)$, $B(1; 1; 2)$ et $C(-3; 2; 2)$ ainsi que la droite (AB) et la sphère $\mathcal{S}$ de centre C et de rayon 3.*
- *Montrer que la droite (AB) et la sphère $\mathcal{S}$ admettent deux points d'intersection I_1 et I_2.*
- *Déterminer une équation cartésienne de la sphère $\mathcal{S}$.*
- *Déterminer un paramétrage de la droite (AB).*
- *On note $(x; y; z)$ les coordonnées d'un point d'intersection I de la droite (AB) et de la sphère $\mathcal{S}$. Remplacer x, y et z dans l'équation cartésienne de la sphère $\mathcal{S}$ en utilisant le paramétrage de la droite (AB) afin de déterminer les coordonnées des points I_1 et I_2.*

Propriété 20. *Dans l'espace muni d'un repère orthonormal, on considère deux points distincts A et B. Alors le point M appartient à la sphère de diamètre $[AB]$ si et seulement si $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$.*

Exercice 17. *Dans l'espace muni d'un repère orthonormal, on considère les points $A(1; 2; 3)$ et $B(3; 2; 1)$. Déterminer une équation cartésienne de la sphère de diamètre $[AB]$.*

Exercices supplémentaires

Exercice 18

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal, on considère les points $A(1;1;1)$, $B\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$ et $C(1;0;2)$.
Faire une figure puis montrer que les droites (AB) et (AC) sont perpendiculaires.

Exercice 19

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal, on considère les points $O(0;0;0)$, $I(1;0;0)$, $J(0;1;0)$, $K(0;0;1)$, $A(1;1;0)$, $B(1;0;1)$, $C(0;1;1)$ et $D(1;1;1)$ ainsi que le cube $OIAJBDCK$.
Faire une figure, calculer les coordonnées du centre G du cube puis calculer l'angle géométrique $\widehat{AGD}$.

Exercice 20 ($\star$)

On considère deux vecteurs quelconques $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ de l'espace. Exprimer $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}$ en fonction de $||\overrightarrow{u}||$, $||\overrightarrow{v}||$ et $||\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}||$.

Exercice 21 ($\star\star$)

Dans l'espace, montrer que l'ensemble des points équidistants des extrémités d'un segment est un plan orthogonal à ce segment et passant par son milieu.

Exercice 22

Dans l'espace, on considère deux points distincts A et B. Déterminer le lieu géométrique formé par les points M vérifiant $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{0}$.

Exercice 23

On considère une base orthonormale directe $(\overrightarrow{i},\overrightarrow{j},\overrightarrow{k})$ de l'espace, calculer $(\overrightarrow{i}\wedge\overrightarrow{k})\wedge(\overrightarrow{j}\wedge\overrightarrow{k})$.

Exercice 24 ($\star\star$)

On considère deux vecteurs orthogonaux $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ de l'espace. Simplifier $\overrightarrow{u}\wedge(\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{v})$.

Exercice 25

Dans l'espace muni d'une base orthonormale directe $(\overrightarrow{i},\overrightarrow{j},\overrightarrow{k})$, déterminer $(\overrightarrow{j}+\overrightarrow{i})\wedge(\overrightarrow{j}-\overrightarrow{i})$.

Exercice 26

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal, on considère les points $I(1;0;0)$, $J(0;1;0)$ et $K(0;0;1)$
Faire une figure puis calculer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{KI}\wedge\overrightarrow{KJ}$.

Exercice 27 ($\star\star$)

On considère trois vecteurs quelconques $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ de l'espace.
Montrer que $\overrightarrow{u}\wedge(\overrightarrow{v}\wedge\overrightarrow{w})+\overrightarrow{v}\wedge(\overrightarrow{w}\wedge\overrightarrow{u})+\overrightarrow{w}\wedge(\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{v})=\overrightarrow{0}$.

Exercice 28

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal, on considère les points $A(1;0;-1)$, $B(1;2;-1)$, $C(0;2;-1)$ et $D(1;2;2)$.

Faire une figure puis calculer le volume du tétraèdre $ABCD$.

Exercice 29

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal, on considère les points $A(1;1;\frac{3}{4})$, $B(1;0;\frac{1}{4})$, $C(\frac{1}{2};0;0)$ et $D(0;\frac{1}{2};0)$.

Faire une figure puis montrer que les points A, B, C et D sont coplanaires.

Exercice 30 ($\star$)

On considère trois vecteurs quelconques $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ de l'espace.

Exprimer $[\overrightarrow{v}+\overrightarrow{w}, \overrightarrow{w}+\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}]$ en fonction de $[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}]$.

Exercice 31 ($\star\star$)

On considère quatre vecteurs quelconques $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v_1}$, $\overrightarrow{v_2}$ et $\overrightarrow{v_3}$ de l'espace.

Montrer que $[\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{v_3}] = 0$.

Exercice 32

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal, on considère les points $A(1;1;0)$, $B(1;0;1)$ et $C(0;1;1)$.

Déterminer une équation cartésienne du plan (ABC).

Exercice 33 ($\star$)

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal, on considère les points $A(1;2;3)$ et $B(3;2;1)$. Déterminer l'ensemble des points équidistants de A et B.

Exercice 34 ($\star\star$)

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal on considère le plan $\mathcal{P} : x+2y+3z=4$. Déterminer une équation cartésienne du symétrique du plan $\mathcal{P}$ par rapport au plan xOy.

Exercice 35

Montrer que le système $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & = & 2 & + & t_1 & + & 3\,t_2 \\ y & = & 1 & - & 2\,t_1 & & \\ z & = & -1 & + & t_1 & + & t_2 \end{array}\right.$ avec $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ est le paramétrage d'un plan et déterminer une équation cartésienne de celui-ci.

Exercice 36

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal, on considère les points $A(0;-1;2)$, $B(1;0;1)$, $C(0;2;0)$, $D(1;-1;-1)$ et $E(2;-2;-2)$. Déterminer l'intersection du plan (ABC) et de la droite (DE).

Exercice 37

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal, déterminer les coordonnées du projeté orthogonal H du point $A(1;1;1)$ sur le plan $\mathcal{P}$ d'équation $3x-4y+5z+21=0$. (on pourra commencer par chercher un paramétrage de la droite $\mathcal{D}$ orthogonale à $\mathcal{P}$ passant par A)

Exercice 38 ($\star\star$)

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal, on considère le projeté orthogonal $M'(x_{M'};y_{M'};z_{M'})$ d'un point $M(x_M;y_M;z_M)$ quelconque sur le plan d'équation cartésienne $x+y+z=0$.

Exprimer $x_{M'}$, $y_{M'}$ et $y_{M'}$ en fonction de x_M, y_M et z_M.

Exercice 39

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal, déterminer les coordonnées du projeté orthogonal H du point $B(1;1;1)$ sur la droite $\mathcal{D}$ passant par le point $A(1;6;3)$ et admettant $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}$ pour vecteur directeur.
(on pourra commencer par chercher une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$ orthogonal à $\mathcal{D}$ passant par B)

Exercice 40

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal, on considère les points $A(1;1;2)$, $B(1;2;3)$, $C(3;3;2)$, $D(3;2;3)$, $E(1;2;1)$ et $F(1;3;2)$. Déterminer l'intersection des plans (ABC) et (DEF).

Exercice 41 ($\star$)

Dans l'espace muni d'un repère orthogonal, on considère les points $A(1;2;3)$ et $B(4;4;4)$. Déterminer le symétrique du point $M(-3;1;3)$ par rapport à la droite (AB).

Exercice 42 ($\star$)

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal, déterminer les coordonnées du projeté orthogonal H du point $M(-2;4;0)$ sur la droite définie par le système d'équations cartésiennes $\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & - & z & = & 1\\ x & - & 2y & + & z & = & 0\end{array}\right.$.

Exercice 43

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal, déterminer l'intersection du plan d'équation cartésienne $x-y+z-11=0$ avec la sphère de centre $\Omega(1;-1;3)$ et de rayon $2\sqrt{3}$.

Exercice 44

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal, on considère les points $A(1;0;2)$, $B(1;2;0)$ et $C(1;-2;1)$. Déterminer l'intersection de la droite (AB) et de la sphère de centre C et de rayon 3.

Exercice 45 ($\star\star$)

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal, on considère les points $A(-2;6;0)$, $B(5;-1;0)$, $C(1;-2;3)$ et $D(-2;2;4)$. Déterminer une équation cartésienne de la sphère circonscrite au tétraèdre $ABCD$.

Exercice 46 ($\star\star$)

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal, on considère les cercles suivants :

$\mathcal{C}_1 : \left\{\begin{array}{ccc} x & = & 0\\ y^2+z^2+2y-6z-11 & = & 0\end{array}\right.$ $\quad\mathcal{C}_2 : \left\{\begin{array}{ccc} y & = & 0\\ x^2+z^2-4x-6z-11 & = & 0\end{array}\right.$.

Montrer qu'il existe une unique sphère contenant $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ et déterminer son centre et son rayon.

Exercice 47 ($\star\star$)

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal, déterminer l'intersection de la sphère $\mathcal{S}_1$ de centre $\Omega_1(-3;1;-2)$ et de rayon $R_1=4\sqrt{3}$ avec la sphère $\mathcal{S}_2$ de centre $\Omega_2(2;6;3)$ et de rayon $R_2=3\sqrt{3}$.

Réponses

1) $\overrightarrow{0}$ et $-\overrightarrow{j}$.

2) $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.

3) 1.

4) $[\overrightarrow{u},\overrightarrow{w},\overrightarrow{v}] = -[\overrightarrow{w},\overrightarrow{w},\overrightarrow{u}] = [\overrightarrow{w},\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}]$.

5) $-2[\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w}]$.

6) $-2x+3y-z+2=0$.

7) $3x-2y+5z=1$.

8) $\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 1+t_1+2t_2 \\ y & = & 2+t_2 \\ z & = & 3+t_1 \end{array}\right.$.

9) $\frac{13}{10}\sqrt{2}$.

10) $\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 1+t \\ y & = & 2 \\ z & = & 3-t \end{array}\right.$.

11) $I(0;2;0)$

12) $\left\{\begin{array}{lcr} x & = & 5+2t \\ y & = & -3-\ t \\ z & = & -\ t \end{array}\right.$.

13) $\sqrt{5}$.

14) sphère de centre $\Omega(2;-1;1)$ et de rayon $R=4$.

15) $r=\sqrt{2}$ et $H(1;1;1)$.

16) $I_1(-3;5;2)$ et $I_2(0;2;2)$.

17) $(x-2)^2+(y-2)^2+(z-2)^2=(\sqrt{2})^2$.

18) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=0$.

19) $G\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$ et $\widehat{AGD}=\arccos\left(\dfrac{1}{3}\right)$.

20) $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}=\dfrac{1}{2}\left(||\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}||^2-||\overrightarrow{u}||^2-||\overrightarrow{v}||^2\right)$.

21) On montre que $AM^2-BM^2=2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{IM}$ avec I milieu de $[AB]$.

22) Droite (AB).

23) $\overrightarrow{k}$.

24) $\overrightarrow{u}\wedge(\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{v})=-||\overrightarrow{u}||^2\overrightarrow{v}$.

25) $2\overrightarrow{k}$.

26) $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.

27) Dans le cas où $\overrightarrow{u}\neq\overrightarrow{0}$ on peut se placer dans une base orthonormale directe dont le premier vecteur est $\overrightarrow{u}$.

28) $V=\dfrac{1}{6}\left|[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}]\right|=1$.

29) $[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}]=0$.

30) $[\overrightarrow{v}+\overrightarrow{w},\overrightarrow{w}+\overrightarrow{u},\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}]=2\,[\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w}]$.

31) Dans le cas où $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$ on peut se placer dans une base orthonormale directe dont le premier vecteur est $\overrightarrow{u}$.

32) $(ABC) : x + y + z - 2 = 0$.

33) Plan d'équation cartésienne $x - z = 0$.

34) $x + 2y - 3z = 4$.

35) $x - y - 3z = 4$.

36) Point de coordonnées $(-1; 1; 1)$.

37) $H(-\frac{1}{2}; 3; -\frac{3}{2})$.

38) $\left\{\begin{array}{lcl} x_{M'} & = & +\frac{2}{3}x_M - \frac{1}{3}y_M - \frac{1}{3}z_M \\ y_{M'} & = & -\frac{1}{3}x_M + \frac{2}{3}y_M - \frac{1}{3}z_M \\ z_{M'} & = & -\frac{1}{3}x_M - \frac{1}{3}y_M + \frac{2}{3}z_M \end{array}\right.$.

39) $H(3; 2; 1)$

40) Droite passant par le point de coordonnées $(2; 0; 0)$ dirigée par le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

41) $M'(-1; -1; 1)$.

42) $H(1; 1; 1)$.

43) Point $(3; -3; 5)$.

44) Points $(1; 1; 1)$ et $(1; -2; 4)$.

45) $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 + z^2 = 5^2$.

46) Sphère de centre $\Omega(2; -1; 3)$ et de rayon 5.

47) Cercle de centre $H(\frac{1}{5}; \frac{21}{5}; \frac{6}{5})$ et de rayon $r = \frac{12}{5}\sqrt{3}$.