

VII. Systèmes linéaires - Matrices

1 Systèmes d'équations linéaires

1.1 Définition d'un système d'équations linéaires

Définition 1. On appelle **système linéaire** de n équations à p inconnues le système d'équations :

$$\begin{cases} a_{1,1}u_1 + a_{1,2}u_2 + \dots + a_{1,p}u_p = v_1 \\ a_{2,1}u_1 + a_{2,2}u_2 + \dots + a_{2,p}u_p = v_2 \\ \vdots \\ a_{n,1}u_1 + a_{n,2}u_2 + \dots + a_{n,p}u_p = v_n \end{cases}$$

Les nombres réels ou complexes $\{u_j\}_{1 \leq j \leq p}$ sont les inconnues du système et les nombres réels ou complexes $\{a_{i,j}, v_i\}_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p}$ les coefficients du système.

En posant $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,p} \end{pmatrix}$, $U = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_p \end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$, ce système se note $AU = V$,

A est alors appelée **matrice associée** au système.

Un système tel que $V = 0$ est dit **homogène**, le système linéaire $AU = 0$ est appelé **système linéaire homogène associé** au système $AU = V$.

Exercice 1. Écrire matriciellement les systèmes linéaires suivants :

$$\mathcal{S}_1 : \begin{cases} x + 2z = 1 \\ -x + y + z = 1 \\ -y - 3z = 1 \end{cases} \quad \mathcal{S}_2 : \begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = 1 \\ 5x - y = 2 \end{cases} \quad \mathcal{S}_3 : \begin{cases} x - 2y = -1 \\ 3x + z = 1 \end{cases}$$

Définition 2. On appelle **solution** d'un système linéaire $\mathcal{S} : AU = V$ d'inconnue U et de matrice associée A une valeur de U vérifiant l'équation $AU = V$. Résoudre un système linéaire c'est déterminer l'ensemble de ses solutions.

Exercice 2. On considère le système linéaire suivant :

$$\mathcal{S} : \begin{cases} 2x + y - z = 3 \\ x - y + 2z = -9 \\ 3x - y - z = -2 \end{cases}$$

- Exprimer z en fonction de x et y en utilisant la ligne 1 puis substituer z dans les lignes 2 et 3.
- Exprimer y en fonction de x en utilisant la ligne 2 puis substituer y dans la ligne 3.
- En déduire les solutions du système \mathcal{S} .

Exercice 3. Résoudre les systèmes de l'exercice 1 en procédant par substitution.

1.2 Opérations élémentaires sur les lignes d'un système linéaire

Définition 3. On définit trois types d'**opérations élémentaires** sur les lignes d'un système linéaire :

- échange des lignes i et j : $L_i \leftrightarrow L_j$.
- multiplication de la ligne i par $\lambda \neq 0$: $L_i \leftarrow \lambda L_i$.
- ajout à la ligne i de la ligne $j \neq i$ multipliée par λ : $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$.

Exercice 4. Effectuer successivement les opérations élémentaires $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$, $L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1$ puis

$$L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \text{ sur le système linéaire } \begin{cases} x + y + z = 1 \\ x \quad \quad - 2z = 1 \\ 2x + y - z = 3 \end{cases}$$

En déduire les solutions du système.

Exercice 5. Décomposer l'opération $L_i \leftarrow 3L_i - 2L_j$ en suite de deux opérations élémentaires de deux manières différentes.

Propriété 1. Une opération élémentaire sur les lignes d'un système admet une opération réciproque.

Exercice 6. Donner des opérations sur les lignes d'un système n'admettant pas d'opération réciproque.

Corollaire 1. Deux systèmes linéaires pour lesquels on passe de l'un à l'autre par une suite finie d'opérations élémentaires sur les lignes ont le même ensemble de solutions.

Exercice 7. Déterminer les solutions du système linéaire $\begin{cases} x + 2y - z = 2 \\ x + y - 2z = -3 \\ 2x + y - z = 1 \end{cases}$ en utilisant des opérations élémentaires sur les lignes.

Définition 4. On appelle **systèmes équivalents**, deux systèmes linéaires pour lesquels on passe de l'un à l'autre par une suite finie d'opérations élémentaires sur les lignes.

On appelle **matrices équivalentes en ligne**, deux matrices A et A' pour lesquelles on passe de l'une à l'autre par une suite finie d'opérations élémentaires sur les lignes, on note $A \underset{L}{\sim} A'$.

Exercice 8. Montrer que les matrices $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ sont équivalentes en lignes.

Définition 5. On appelle **matrice augmentée** d'un système linéaire $AU = V$ la matrice $(A|V)$ obtenue en ajoutant à droite la colonne V à la matrice A associée au système.

Exercice 9. Déterminer la matrice augmentée M du système $\begin{cases} -x + y + z = 1 \\ x + y + z = 1 \\ 2x + y = 1 \end{cases}$ puis résoudre celui-ci en effectuant des opérations élémentaires sur M .

Propriété 2. Si on passe d'un système linéaire \mathcal{S} à un système linéaire \mathcal{S}' par une suite finie d'opérations élémentaires sur les lignes alors la matrice augmentée de \mathcal{S}' s'obtient à partir de celle de \mathcal{S} par la même suite d'opérations.

1.3 Échelonnement d'un système linéaire

Définition 6. On appelle **matrice échelonnée en lignes**, une matrice telle que :

- si une ligne est entièrement nulle, toutes les lignes suivantes le sont aussi,
- à partir de la deuxième ligne, dans toute ligne non entièrement nulle, le premier coefficient non nul est situé à droite du premier coefficient non nul de la ligne précédente.

Exemple 1. Les matrices $M_1 = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$ sont échelonnées en lignes.

Définition 7. On appelle **pivot** d'une ligne non entièrement nulle son premier coefficient non nul.

On appelle **matrice échelonnée réduite en lignes** une matrice échelonnée dont tous les pivots sont égaux à 1 et sont les seuls éléments non nuls de leur colonne.

Exercice 10. Montrer que les matrices M_1 et M_2 de l'exemple 1 sont équivalentes en lignes à des matrices échelonnées réduites en lignes que l'on déterminera.

Théorème 1. Toute matrice non nulle est équivalente en lignes à une unique matrice échelonnée réduite en lignes.

Exercice 11. Déterminer la matrice échelonnée réduite en lignes équivalente en lignes à la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 & -4 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 3 & -3 \end{pmatrix}.$$

1.4 Résolution d'un système linéaire

Définition 8. On appelle **rang d'un système linéaire** le nombre de pivots de la matrice échelonnée réduite équivalente en lignes à la matrice associée au système.

Exercice 12. Déterminer le rang des systèmes suivants :

$$\mathcal{S}_1 : \begin{cases} x + y - 2z = 1 \\ 2x - 3y + z = -1 \\ -4x + 11y - 7z = 2 \end{cases} \quad \mathcal{S}_2 : \begin{cases} x + 2y + 3z = -2 \\ 2x + 3y + z = 1 \\ 3x + y + 2z = 1 \end{cases} \quad \mathcal{S}_3 : \begin{cases} x - y + z = 1 \\ x + 2y - z = 1 \\ x - 4y + 3z = 1 \end{cases}$$

Propriété 3. On considère un système linéaire dont la matrice associée est échelonnée réduite en lignes, on note r son rang et p son nombre d'inconnues.

- Si le système comporte une ligne dont le membre de gauche est nul et pas celui de droite il n'admet aucune solution et est dit **incompatible**,
- dans le cas contraire le système est dit **compatible**, il admet :
 - ◊ une solution unique si $r = p$,
 - ◊ une infinité de solutions si $r < p$, l'ensemble des solutions étant alors paramétré par $p - r$ **inconnues secondaires** situées sur les colonnes sans pivot, les inconnues situées sur les colonnes avec pivot étant appelées **inconnues principales**.

Exercice 13. Résoudre les systèmes de l'exercice 12.

Propriété 4. Les solutions d'un système linéaire \mathcal{S} compatible sont de la forme $U = \tilde{U} + U_H$ où \tilde{U} est une solution particulière de \mathcal{S} et U_H une solution quelconque du système linéaire homogène \mathcal{S}_H associé à \mathcal{S} .

Exercice 14. Vérifier la propriété sur les systèmes \mathcal{S}_2 et \mathcal{S}_3 de l'exercice 12.

1.5 Famille de vecteurs de \mathbb{R}^n

Définition 9. On appelle **combinaison linéaire** d'une **famille de vecteurs** de \mathbb{R}^n , $\mathcal{F} = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p)$, un vecteur $\lambda_1 \vec{u}_1 + \lambda_2 \vec{u}_2 + \dots + \lambda_p \vec{u}_p$ avec $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p \in \mathbb{R}$.

Exemple 2. $\vec{u} - \vec{v}$ et $2\vec{u} + 3\vec{v} - \vec{w}$ sont des combinaisons linéaires de la famille $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$.

Exercice 15. On considère une famille de vecteurs $\mathcal{F} = \left(\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{v} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$ de \mathbb{R}^2 , montrer que le vecteur $\vec{e} \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix}$ est une combinaison linéaire des vecteurs de la famille \mathcal{F} .

Remarque 1. Résoudre un système linéaire $AU = V$, c'est chercher si le membre de droite V peut s'exprimer comme combinaison linéaire des colonnes de la matrice A .

Définition 10. Une famille de vecteurs \mathcal{F} de \mathbb{R}^n est dite **génératrice** de \mathbb{R}^n si tout vecteur de \mathbb{R}^n peut s'exprimer comme combinaison linéaire des vecteurs de \mathcal{F} .

Exercice 16. On considère une famille de vecteurs $\mathcal{F} = \left(\vec{u} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{v} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{w} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$ de \mathbb{R}^3

ainsi qu'un vecteur $\vec{e} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

Montrer que le système $\vec{e} = \lambda \vec{u} + \mu \vec{v} + \nu \vec{w}$ d'inconnues λ, μ, ν admet une solution. En déduire que \mathcal{F} est génératrice de \mathbb{R}^3 .

Définition 11. Une famille de vecteurs de \mathbb{R}^n est dite **libre** si aucun de ses vecteurs ne peut s'écrire comme une combinaison linéaire des autres. Une famille de vecteurs qui n'est pas libre est dite **liée**.

Remarque 2. Deux vecteurs non colinéaires forment une famille libre, trois vecteurs non coplanaires forment une famille libre.

Propriété 5. Caractérisation d'une famille libre

Une famille de vecteurs $\mathcal{F} = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p)$ est libre si et seulement si le système linéaire $\lambda_1 \vec{u}_1 + \lambda_2 \vec{u}_2 + \dots + \lambda_p \vec{u}_p = \vec{0}$ admet pour unique solution $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_p = 0$.

Exercice 17. On considère une famille de vecteurs $\mathcal{F} = \left(\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{v} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{w} \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix} \right)$ de \mathbb{R}^3 .

Résoudre le système $\vec{0} = \lambda \vec{u} + \mu \vec{v} + \nu \vec{w}$ d'inconnues λ, μ, ν , en déduire que la famille \mathcal{F} est liée puis exprimer \vec{w} comme combinaison linéaire de \vec{u} et \vec{v} .

2 Matrices

2.1 Opérations sur les matrices

On note $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} .

Définition 12. On appelle **matrice** à n lignes et p colonnes à coefficients réels ou complexes un tableau rectangulaire à n lignes et p colonnes de nombres réels ou complexes :

$$A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{np} \end{pmatrix}$$

On note a_{ij} le coefficient de la matrice A situé sur la i -ième ligne et sur la j -ième colonne.

Une matrice comportant une seule ligne est appelée **matrice ligne**, une matrice comportant une seule colonne est appelée **matrice colonne**, une matrice comportant le même nombre de lignes que de colonnes est appelée **matrice carrée**.

On note $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices à n lignes et p colonnes à coefficients dans \mathbb{K} et on note $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices carrées à n lignes et n colonnes à coefficients dans \mathbb{K} .

Exercice 18. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -4 & 5 & -6 \end{pmatrix}$, donner les coefficients a_{12} , a_{22} et a_{23} .

Définition 13. Étant données deux matrices $A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$, on définit :

$$\lambda \cdot A = (\lambda a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$$

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$$

Exercice 19. Calculer $2A - 3B$ avec $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -4 & 5 & -6 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 6 & -5 & 4 \end{pmatrix}$.

Propriété 6. L'addition dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est **commutative** et **associative** :

Pour toutes matrices $A, B, C \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ on a :

$$A + B = B + A$$

$$(A + B) + C = A + (B + C)$$

Définition 14. Le **produit matriciel** de deux matrices $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $U \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ noté AU est la matrice colonne obtenue par combinaison linéaire des colonnes de A avec les coefficients de U :

$$AU = u_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix} + u_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{pmatrix} + \cdots + u_p \begin{pmatrix} a_{1p} \\ a_{2p} \\ \vdots \\ a_{np} \end{pmatrix}$$

Remarque 3. Le produit AU n'a de sens que si le nombre de colonnes de la matrice A est égal au nombre de lignes de la matrice U .

Exercice 20. On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -4 & 5 & -6 \end{pmatrix}$ et $U = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Calculer le produit matriciel AU .

Remarque 4. Le calcul du **produit matriciel** de deux matrices $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $U \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ peut se poser de la façon suivante :

$$\begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ip} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cdot \\ \cdot \\ v_i \\ \cdot \\ \cdot \end{pmatrix}$$

avec $v_i = a_{i1} \times u_1 + a_{i2} \times u_2 + \cdots + a_{ip} \times u_p$

Exercice 21. On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ et $U = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Calculer le produit matriciel AU .

Exercice 22. On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -4 & 5 & -6 \end{pmatrix}$, $U = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Écrire le système linéaire correspondant à l'écriture matricielle $AU = V$.

Définition 15. On définit le **produit matriciel** de deux matrices $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ par :

$$\begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ip} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{pj} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cdot \\ \cdot \\ c_{ij} \\ \cdot \end{pmatrix}$$

avec $c_{ij} = a_{i1} \times b_{1j} + a_{i2} \times b_{2j} + \dots + a_{ip} \times b_{pj}$

Remarque 5. Le produit $A \times B$ est une matrice dont les colonnes sont obtenues par produit de A par les colonnes de B , il n'a de sens que si le nombre de colonnes de la matrice A est égal au nombre de lignes de la matrice B .

Exercice 23. Calculer $A \times C$ et $C \times A$ avec $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -4 & 5 & -6 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} -1 & 6 \\ 2 & -5 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$.

Propriété 7. Le produit matriciel est **associatif** et **distributif** par rapport à l'addition.

2.2 Noyau et Image d'une matrice

Définition 16. On appelle **noyau** d'une matrice $A \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ et on note $\text{Ker } A$ l'ensemble des vecteurs U solutions du système linéaire homogène $AU = 0$ associé à la matrice A .

Remarque 6. On a $\text{Ker } A \subset \mathbb{K}^p$.

Exercice 24. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Résoudre le système linéaire $AU = 0$ en procédant par échelonnement-réduction et en déduire le noyau de la matrice A .

Définition 17. On appelle **image** d'une matrice $A \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ et on note $\text{Im } A$ l'ensemble des vecteurs V tels que le système linéaire $AU = V$ associé à la matrice A soit compatible.

Remarque 7. On a $\text{Im } A \subset \mathbb{K}^n$.

Remarque 8. $\text{Im } A$ est l'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs associés aux colonnes de la matrice A .

Exercice 25. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$. Déterminer une condition nécessaire et suffi-

sante sur $V = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ pour que le système linéaire $AU = V$ admette une solution (on procédera par échelonnement-réduction) et en déduire l'image de la matrice A .

Définition 18. On appelle **rang** d'une matrice $A \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ et on note $\text{rg } A$ le nombre de pivots de la matrice échelonnée réduite équivalentes en lignes à la matrice A .

Exercice 26. Déterminer le rang de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$.

2.3 Matrices carrées

Définition 19. Une matrice carrée A est appelée :

- **matrice diagonale** si $a_{ij} = 0$ pour tout $i \neq j$
- **matrice triangulaire supérieure** si $a_{ij} = 0$ pour tout $i > j$
- **matrice triangulaire inférieure** si $a_{ij} = 0$ pour tout $i < j$

Exercice 27. Montrer que le produit de deux matrices diagonales de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ou $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ est une matrice diagonale. Que peut-on dire du produit de deux matrices triangulaires de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ou $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$?

2.3.1 Puissances d'une matrice carrée

Définition 20. On appelle **matrice identité** de taille n la matrice carrée $I_n = \begin{pmatrix} 1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & 1 \end{pmatrix}$ de taille n dont les coefficients diagonaux sont égaux à 1 et dont les autres coefficients sont nuls.

Exercice 28. Calculer les produits AI_2 et I_2A pour $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ puis calculer les produits AI_3 et I_3A pour $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{K})$. Que valent les produits AI_n et I_nA pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$?

Définition 21. On définit les **puissances d'une matrice** carrée $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ par la récurrence :

$$\begin{cases} A^0 = I_n \\ A^{m+1} = A(A^m), \text{ pour tout } m \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Exercice 29. Calculer les puissances de la matrice $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Propriété 8. On considère une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ alors pour tout $m_1, m_2 \in \mathbb{N}$ on a $A^{m_1}A^{m_2} = A^{m_1+m_2}$.

Exercice 30. On considère $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, développer $(A + B)^3$.

Propriété 9. Triangle de Pascal

On considère deux matrices $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $AB = BA$ et $m \in \mathbb{N}$, alors le développement de $(A + B)^m$ est le même que celui de $(A + B)^m$ avec A et B des nombres réels ou complexes.

Remarque 9. Il ne faut pas oublier de vérifier que les matrices A et B commutent entre elles !

Exercice 31. On considère $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, développer $(A + I_n)^5$.

2.3.2 Inverse d'une matrice carrée

Définition 22. Une matrice carrée $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite *inversible* s'il existe une matrice carrée $A^{-1} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ appelée **inverse** de la matrice A telle que $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$.

Remarque 10. La matrice identité est inversible et est son propre inverse.

Propriété 10. Si une matrice carrée $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ admet un inverse, celui-ci est unique.

Exercice 32. Montrer que la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ est inversible et déterminer son inverse.

Propriété 11. On considère un système linéaire $AU = V$ de n équations à n inconnues, si A est inversible alors ce système admet une unique solution $U = A^{-1}V$.

Propriété 12. Méthode de calcul de l'inverse d'une matrice

Une matrice carrée $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible si $\text{rg } A = n$ et l'algorithme d'échelonnement-réduction en lignes appliqué à la matrice augmentée $(A|I_n)$ aboutit à la matrice augmentée $(I_n|A^{-1})$.

Exercice 33. Montrer que la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & 6 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ est inversible et déterminer son inverse.

Propriété 13. On considère deux matrices $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ inversibles et $m \in \mathbb{N}$, alors :

- A^m est inversible et $(A^m)^{-1} = (A^{-1})^m$,
- AB est inversible et $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Définition 23. On appelle **groupe linéaire** et on note $GL_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices inversibles de taille n .

Exercices supplémentaires**Exercice 34**

Écrire le système $\begin{cases} x - 2z = 2 \\ x - y - t = -1 \\ 2z - 3t = 0 \end{cases}$ sous forme matricielle $AU = V$ avec $U = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$.

Exercice 35

Résoudre le système $\begin{cases} x - y + z = 1 \\ x + y - z = 2 \\ -x + y + z = 3 \end{cases}$ en procédant par substitution.

Exercice 36

Résoudre le système $\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ 2x + 3y + z = 1 \\ 3x + y + 2z = 1 \end{cases}$ en procédant par substitution.

Exercice 37 (*)

Résoudre le système $\begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ 4x + 5y + 6z = 0 \\ 7x + 8y + 9z = 0 \end{cases}$ en procédant par substitution.

Exercice 38

Montrer que les matrices $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ sont équivalentes en lignes.

Exercice 39

Pour chacune des matrices suivantes, déterminer une matrice échelonnée réduite en lignes qui lui soit équivalente en lignes :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 7 \\ 11 & 13 & 17 & 19 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ 2 & -3 & 4 & -5 \\ 3 & -4 & 5 & -6 \end{pmatrix}.$$

Exercice 40 ()**

Déterminer en fonction de $m \in \mathbb{R}$ une matrice échelonnée réduite en lignes qui soit équivalente en lignes à la matrice $\begin{pmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & 2 \\ 2 & 2 & m \end{pmatrix}$.

Exercice 41

Déterminer le rang du système $\begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ 4x + 5y + 6z = 0 \\ 7x + 8y + 9z = 0 \\ 10x + 11y + 12z = 0 \end{cases}$.

Exercice 42 (★)

Déterminer les valeurs de $m \in \mathbb{R}$ pour lesquelles le système $\begin{cases} mx + y + 2z = 1 \\ x + y + z = 2 \\ 2x + y + mz = 3 \end{cases}$ d'inconnues x, y et z est compatible.

Exercice 43

Résoudre le système $\begin{cases} 2y + 3z = 1 \\ x + 3z = 2 \\ x + 2y = 3 \end{cases}$.

Exercice 44

Résoudre le système $\begin{cases} 2x - 3y + z = 1 \\ -3x + 2y + z = 2 \\ 7x - 8y + z = 0 \end{cases}$.

Exercice 45

Résoudre le système $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - y + z = 1 \\ -x + y + z = -1 \\ x + y - z = 1 \end{cases}$.

Exercice 46

Résoudre le système $\begin{cases} x + 2y + 3z + 4t = 1 \\ 5x + 6y + 7z + 8t = 1 \\ 9x + 10y + 11z + 12t = 1 \end{cases}$.

Exercice 47 (★★)

Résoudre en fonction de $m \in \mathbb{R}$ le système $\begin{cases} mx + y + 2z = 1 \\ x + y + z = 2 \\ 2x + y + mz = 3 \end{cases}$ d'inconnues x, y et z .

Exercice 48 (★★)

Résoudre le système $\begin{cases} x^2 y^2 z^5 = 1 \\ x^3 y^2 z^6 = 2 \\ x y^3 z^6 = 3 \end{cases}$ avec $x, y, z \in \mathbb{R}$.

Exercice 49 (★★)

On définit la fonction $f : x \mapsto \sqrt{ax^3 + bx^2 + cx + d}$ avec $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

Montrer qu'il existe a, b, c et d tels que $f(0) = 0$, $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$, $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$.

Exercice 50

Montrer que la famille de vecteurs $\mathcal{F} = \left\{ \vec{u}_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \vec{u}_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}; \vec{u}_3 \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \\ 27 \end{pmatrix}; \vec{u}_4 \begin{pmatrix} 4 \\ 16 \\ 64 \end{pmatrix} \right\}$ est génératrice de \mathbb{R}^3 . La famille \mathcal{F} est-elle libre ?

Exercice 51

On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

Calculer AB et BA .

Exercice 52

On pose $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$. Déterminer les matrices U telles que $MU = V$.

Exercice 53

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$.

Déterminer $\text{Ker } A$ et $\text{Im } A$.

Exercice 54 (★★)

On note $M_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{pmatrix}$ pour $\lambda \in \mathbb{R}$. Déterminer $\text{Ker } M_\lambda$ et $\text{Im } M_\lambda$ en fonction de λ .

Exercice 55

Déterminer le rang de la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Exercice 56 (★★)

On note $M_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{pmatrix}$ pour $\lambda \in \mathbb{R}$. Déterminer le rang de M_λ en fonction de λ .

Exercice 57

On note $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer M^4 .

Exercice 58 (★)

On pose $M_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ pour $\theta \in \mathbb{R}$. Calculer $M_\alpha M_\beta$ pour $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, en déduire $(M_\theta)^n$ pour $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 59 (★)

On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. Déterminer les matrices B telles que $AB = BA$.

Exercice 60 (★★)

On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, calculer M^n pour $n \in \mathbb{N}$ en utilisant le triangle de Pascal.
(On pourra décomposer M sous la forme $M = I_3 + N$)

Exercice 61

Montrer que la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible et déterminer son inverse.

Exercice 62 (★)

Montrer que la matrice $M = \begin{pmatrix} 1+i & -1 & i \\ i & 0 & 1 \\ 1 & i & 1 \end{pmatrix}$ est inversible et déterminer son inverse. ($i^2 = -1$)

Exercice 63 (★★)

On pose $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Exprimer M^2 comme combinaison linéaire de M et de I_3 , en déduire que M est inversible et calculer M^{-1} .

Exercice 64 (★★)

Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur a, b, c pour que la matrice $\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{pmatrix}$ soit inversible.

Exercice 65 (★★)

On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} \cos x & 0 & i \sin x \\ 0 & 1 & 0 \\ i \sin x & 0 & \cos x \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ avec $x \in \mathbb{R}$.
Calculer $B = P^{-1}AP$, en déduire A^n pour $n \in \mathbb{N}$.

Réponses

- 1) $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -3 \end{pmatrix}$, $U_1 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, et $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$, $U_2 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, et $V_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$; $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $U_3 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, et $V_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
- 2) $(x = -1; y = 2; z = -3)$.
- 3) \emptyset ; $(x = \frac{1}{3}; y = -\frac{1}{3})$; $(x; y = \frac{x+1}{2}; z = 1 - 3x)$.
- 4) \emptyset .
- 5) $L_i \leftarrow 3L_i$ ou bien $L_i \leftarrow L_i - \frac{2}{3}L_j$.
 $L_i \leftarrow L_i - 2L_j$ ou bien $L_i \leftarrow 3L_i$.
- 6) $L_i \leftarrow 0L_i$; $L_i \leftarrow L_j$.
- 7) $(x = 1; y = 2; z = 3)$.
- 8) $L_1 \leftarrow -L_1$, $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$, $L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1$, $L_2 \leftarrow \frac{1}{2}L_2$, $L_3 \leftarrow L_3 - 3L_2$, $L_3 \leftarrow -L_3$, $L_1 \leftarrow L_1 + L_2$ et $L_2 \leftarrow L_2 - L_3$.
- 9) $(x = 0; y = 1; z = 0)$.
- 10) $M_1 \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $M_2 \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$.
- 11) $M \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{7}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.
- 12) $\text{rg}(\mathcal{S}_1) = 2$, $\text{rg}(\mathcal{S}_2) = 3$ et $\text{rg}(\mathcal{S}_3) = 2$.
- 13) \emptyset , $(x = 1; y = 0; z = -1)$ et $(x = 1 - \frac{1}{3}z; y = \frac{2}{3}z; z = z)$.
- 14) \emptyset , $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{3}z \\ \frac{2}{3}z \\ z \end{pmatrix}$.
- 15) $\vec{e} = -2\vec{u} + 3\vec{v}$.
- 16) On montre que le système est de rang 3.
- 17) $\vec{w} = 2\vec{u} - 3\vec{v}$.
- 18) $a_{12} = -2$, $a_{22} = 5$ et $a_{23} = -6$.
- 19) $2A - 3B = \begin{pmatrix} 5 & -10 & 15 \\ -26 & 25 & -24 \end{pmatrix}$.
- 20) $AU = \begin{pmatrix} 6 \\ -12 \end{pmatrix}$.
- 21) $AU = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}$.
- 22) $\begin{cases} x - y + 3z = 1 \\ -4x + 5y - 6z = 1 \end{cases}$
- 23) $AC = \begin{pmatrix} -14 & 28 \\ 32 & -73 \end{pmatrix}$ et $CA = \begin{pmatrix} -25 & 32 & -39 \\ 22 & -29 & 36 \\ -19 & 26 & -33 \end{pmatrix}$.
- 24) $\text{Ker } A = \left\{ \begin{pmatrix} z \\ -2z \\ z \end{pmatrix} / z \in \mathbb{R} \right\}$.
- 25) $\text{Im } A = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} / a - 2b + c = 0 \right\}$.
- 26) $\text{rg } A = 2$.
- 27) Le produit de deux matrices triangulaires supérieures (resp. inférieures) est une matrice triangulaire supérieure (resp. inférieure).
- 28) $AI_n = I_n A = A$.

- 29) $N^0 = I_4$, $N^1 = N$, $N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $N^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $N^m = 0$ pour $m \geq 4$.
- 30) $(A + B)^3 = A^3 + A^2B + ABA + AB^2 + BA^2 + BAB + B^2A + B^3$.
- 31) $(A + I_n)^5 = A^5 + 5A^4 + 10A^3 + 10A^2 + 5A + I_n$.
- 32) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.
- 33) $A^{-1} = \begin{pmatrix} -24 & 20 & -5 \\ 18 & -15 & 4 \\ 5 & -4 & 1 \end{pmatrix}$.
- 34) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.
- 35) $(x = \frac{3}{2}; y = \frac{5}{2}; z = 2)$.
- 36) $(x = \frac{1}{6}; y = \frac{1}{6}; z = \frac{1}{6})$.
- 37) $(x = z; y = -2z; z = z)$.
- 38) $L_3 \leftarrow \frac{1}{3}L_3$, $L_2 \leftarrow L_2 - L_3$, $L_2 \leftarrow \frac{1}{2}L_2$, $L_1 \leftarrow L_1 - L_3$ et $L_1 \leftarrow L_1 - L_2$.
- 39) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & -\frac{34}{7} \\ 0 & 1 & 3 & \frac{39}{7} \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
- 40) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ pour $m = 1$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ pour $m = 2$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{5}{8} \\ 0 & 1 & -\frac{7}{8} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ pour $m = -3$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ pour $m \neq 1$, $m \neq 2$ et $m \neq -3$.
- 41) Le rang du système est 2.
- 42) Le système est compatible pour $m \neq 2$.
- 43) $(x = 2; y = \frac{1}{2}; z = 0)$.
- 44) $(x = -\frac{8}{5} + z; y = -\frac{7}{5} + z; z = z)$.
- 45) $(x = 1; y = 0; z = 0)$.
- 46) $(x = -1 + z + 2t; y = 1 - 2z - 3t; z = z; t = t)$.
- 47) $(x = 1 + z; y = 1 - 2z; z = z)$ si $m = 0$, $(x = \frac{-1}{m-2}; y = 2; z = \frac{1}{m-2})$ si $m \neq 0$ et $m \neq 2$, pas de solution pour $m = 2$.
- 48) $(x = \frac{1}{72}; y = \frac{1}{3456}; z = 144)$ en passant au logarithme (on remarque que x, y et z sont strictements positifs).
- 49) $a = -\frac{18}{\pi^3}$, $b = \frac{27}{2\pi^2}$, $c = -\frac{1}{4\pi}$ et $d = 0$.
- 50) On montre que $\vec{u}_4 = 4\vec{u}_1 - 6\vec{u}_2 + 4\vec{u}_3$.
- 51) $AB = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$ et $BA = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$.
- 52) $U = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.
- 53) $\text{Ker } A = \left\{ \begin{pmatrix} -2z \\ z \end{pmatrix}, z \in \mathbb{K} \right\}$ et $\text{Im } A = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, a, b, c \in \mathbb{K} / a - 2b + c = 0 \right\}$.
- 54) $\text{Ker } M_0 = \left\{ \begin{pmatrix} -z \\ z \end{pmatrix}, z \in \mathbb{K} \right\}$ et $\text{Im } M_0 = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, a, b, c \in \mathbb{K} / a - b + c = 0 \right\}$; $\text{Ker } M_1 = \left\{ \begin{pmatrix} -z \\ 0 \\ z \end{pmatrix}, z \in \mathbb{K} \right\}$ et $\text{Im } M_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, a, b, c \in \mathbb{K} / a - c = 0 \right\}$; $\text{Ker } M_\lambda = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, z \in \mathbb{K} \right\}$ et $\text{Im } M_\lambda = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, a, b, c \in \mathbb{K} \right\}$ si $\lambda \neq 0, 1$.
- 55) $\text{rg } M = 2$.
- 56) Le rang de M_λ vaut 1 si $\lambda = 1$, 2 si $\lambda = -2$ et 3 sinon.
- 57) $M^4 = M$.

$$58) M_\alpha M_\beta = M_{\alpha+\beta} \text{ et } (M_\theta)^n = M_{n\theta}.$$

$$59) B = \begin{pmatrix} -c+d & \frac{2}{3}c \\ c & d \end{pmatrix}.$$

$$60) M^n = \begin{pmatrix} 1 & 2n & 2(2n+1) \\ 0 & 1 & 2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$61) M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$62) M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -i \\ 1+i & i & 1-2i \\ -i & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$63) M^2 = 5M - 4I_3 \text{ d'où } M^{-1} = \frac{1}{4}(5I_3 - M) = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$64) a^3 + b^3 + c^3 \neq 3abc.$$

$$65) B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{ix} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-ix} \end{pmatrix} \text{ et } A^n = \begin{pmatrix} \cos(nx) & 0 & i \sin(nx) \\ 0 & 1 & 0 \\ i \sin(nx) & 0 & \cos(nx) \end{pmatrix}.$$